ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN
Band 13 April 1933 Heft 2

Am 19. April des Jahres vollendet Richard v. Mises, der Gründer, Schriftleiter und Herausgeber dieser Zeitschrift, der Mitbegründer und Geschäftsführer der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik, der vielseitige, scharfsinnige und fruchtbare Forscher auf den Gebieten der reinen und angewandten Mathematik sowie der technischen und analytischen Mechanik sein fünfzigstes Lebensjahr.

Es wäre sehr verfrüht, von seiner Lebensarbeit schon zu einem Zeitpunkt zu sprechen, an dem erst noch viele neue Früchte seines Schaffens erwartet werden, aber der genannte äußere Lebensabschnitt ist doch wert, als Anlaß genommen zu werden für die in diesem Heft enthaltene von dem wissenschaftlichen Beirat und dem Verlag des Vereins deutscher Ingenieure, von der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik und von dem Schriftleitungsausschuß der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik dargebrachte Gabe.

Sie soll die dankbare Anerkennung für seine unermüdliche und erfolgreiche fast vierzehnjährige Arbeit im Dienste der Zeitschrift und zum Nutzen der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik dartun und die Hochschätzung der Fachwelt für seine bisherige wissenschaftliche Arbeit beweisen.

Der Schriftleitungsausschuß bringt in diesem, durch die Unterstützung des Vereins deutscher Ingenieure und der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik und durch freudige Mitarbeit vieler Fachgenossen zustande gekommenen Widmungsheft eine Auswahl von Arbeiten aus den meisten von R. v. Mises bearbeiteten Gebieten.

Der Kreis der Mitarbeiter des Mises'schen Instituts, der Zeitschrift, der engeren Kollegen und der sonstigen führenden Wissenschaftler konnte freilich wegen der schwierigen wirtschaftlichen Verhältnisse nicht so voll in Anspruch genommen werden, wie es zu wünschen war, und so wird man leider noch manche Forscher in dem Inhaltsverzeichnis dieses Heftes vermissen; aber der Schriftleitungsausschuß möchte ganz besonders betonen, daß nur der Mangel an Raum und die gedrängte Zeit die Einholung weiterer Arbeiten gehindert hat.

Das Heft, das nun hier vorgelegt wird, gibt aber immerhin auf Grund der Beiträge einiger engerer Kollegen der Universität und der Technischen Hochschule, einiger wissenschaftlicher Freunde und Schüler und einer sehr charakteristischen Reihe gleichstrebender Forscher aus vielen Ländern einen Überblick über die heutigen Aufgabestellungen und Lösungen der Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik, der Festigkeitslehre, der Strömungslehre und der Dynamik.

Es zeigt, daß angewandte Mathematik und Mechanik, welche auf weniger jungfräulichem Boden arbeiten als auf benachbarten Gebieten z. B. die Atomdynamik und die Relativitätstheorie, zwar nicht die Resonanz so weiter Kreise genießen wie diese umstürzenden Theorien, daß sich jedoch eine stillere, aber doch weltumspannende wissenschaftliche Gemeinschaftsarbeit auch auf diesem klassischen Boden immer weiter ausbildet und neue, wichtige Erkenntnisse und Möglichkeiten gewinnt und vermittelt.

Für den Verein deutscher Ingenieure	*Für die Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik*	*Für den Schriftleitungsausschuß*
Nägel	*Prandtl*	*Reissner*

Nomographie und Hessesches Übertragungsprinzip.

Von *L. Bieberbach* in Berlin.

Zweck dieser Zeilen ist es lediglich, auf einen Zusammenhang hinzuweisen, der bisher anscheinend nicht bemerkt wurde. Die von d'Ocagne zuerst 1884 angegebene Fluchtlinientafel für die Gleichung zweiten Grades ist weiter nichts als die figürliche Darstellung des Übertragungsprinzips, das O. Hesse 1867 aufgestellt hat. Es handelt sich dabei um die Abbildung der Punktepaare einer Geraden auf die Geraden der Ebene. Am unmittelbarsten gelangt man vom Übertragungsprinzip zum Nomogramm, wenn man das Prinzip in der Fassung nimmt, die ihm Klein 1873 gab (wiederabgedruckt Math. Annalen 22 (1883)) = Ges. Abh. I, S. 406.

Man lasse jeder geraden Linie der Ebene das Punktepaar entsprechen, in welchem sie einen festen Kegelschnitt schneidet und beziehe den Kegelschnitt durch stereographische Projektion von irgendeinem seiner Punkte aus auf eine feste Gerade. Die Punktepaare der Geraden werden so die Bilder der Linien der Ebene.

Analytisch stellt man die beschriebene Übertragung am einfachsten so dar:

$$u_1 \lambda_1^2 + 2 u_2 \lambda_1 \lambda_2 + u_3 \lambda_2^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

sei die Gleichung eines Punktepaares einer Geraden g, auf der λ_1, λ_2 die homogenen Koordinaten sind. Man deutet u_1, u_2, u_3 als projektive Linienkoordinaten der Ebene. Die Linien, welche Doppelpunkten auf g entsprechen, berühren die Kurve

$$u_2^2 - u_1 u_3 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (2),$$

d. h. in Punktkoordinaten

$$x_2^2 - 4 x_1 x_3 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Eine Tangente (u) von (2) berührt nach (1) im Punkte

$$x_1 = \lambda_1^2, x_2 = 2 \lambda_1 \lambda_2, x_3 = \lambda_2^2 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

die (3). Eine beliebige Gerade

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$$

schneidet (3) nach (4) in den Punkten (λ), für die (1) gilt. Denkt man sich somit gemäß (4) an den Punkten von (3) die Parameterwerte (λ) markiert, so kann man (3) zur Auflösung von (1) verwenden. Man hat nur noch auf zwei Seiten des Koordinatendreiecks die Koordinaten u der Geraden zu markieren, um eine beliebig gegebene Gerade aufzeichnen zu können; an ihren Schnittpunkten mit (3) liest man nach (4) die Wurzeln von (1) ab. Von den drei Seiten des Koordinatendreiecks berühren $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ die Kurve (3), während $x_2 = 0$ die Berührungspunkte verbindet. Nimmt man nun $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ als zwei parallele Geraden, so erhält man genau die Darstellung, die d'Ocagne für seine Fluchtlinientafel der Gleichung zweiten Grades gewählt hat. Man setzt $\frac{u_1}{u_3} = u$, $\frac{u_2}{u_3} = v$ und $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = x$. Dann hat man aus (1) die Gleichung

$$u + v x + x^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Die u werden auf dem gleichmäßig geteilten $x_1 = 0$, die v auf dem gleichmäßig geteilten $x_2 = 0$ eingestellt. Die Verbindungslinie beider Punkte schneidet (3) in den beiden Wurzeln von (5).

Es liegt auf der Hand, daß man auch weitere Fluchtlinientafeln, z. B. die von $x^3 + u x + v = 0$ mit verwandten Übertragungen in Zusammenhang bringen und nach der gleichen Methode behandeln kann. Hesse selber gab, Crelles Journal, Bd. 66 (1866) (= Ges. Werke S. 531), seinem Prinzip die zu vorstehender duale Fassung; er bildete also die Punktepaare der Geraden auf die Punkte einer Ebene ab, so daß den beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung die beiden Tangenten von dem Punkte an die C_2 bzw. die Berührungspunkte auf der C_2 entsprechen[1]). Bemerkt man aber, daß diese Berührungspunkte auf der C_2 von der Polaren des Punktes ausgeschnitten werden, so hat man doch wieder sofort das Nomogramm von d'Ocagne.

Es bietet sich also in mehr als einer Weise Gelegenheit, dies Nomogramm aus dem Gedankenkreis des Hesseschen Übertragungsprinzips ohne weiteres abzulesen. M 9

[1]) Auch dies entspricht einem bekannten Nomogramm.

Über die Erregung von Wellen in einem Kanal durch eine bewegte Querwand.

Von *J. M. Burgers* in Delft.

1. Neben den sehr zahlreichen Betrachtungen über Form und Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Oberflächenwellen, sowohl auf Wasser unbegrenzter Tiefe wie in Kanälen, gibt es Untersuchungen, welche sich mit der Frage der Erregung von Wellen durch bewegte Körper oder Wände beschäftigen. In diesem Zusammenhang dürfte vielleicht auch das nachfolgende Problem einiges Interesse haben.

Es sei gegeben ein Kanal von der Tiefe h, das sich in der positiven x-Richtung in unbegrenzter Länge ausstreckt. An der Stelle $x=0$ bestehe die Möglichkeit, vermittelst einer bis zum Kanalboden herabreichenden Wand der Horizontalkomponente der Geschwindigkeit einen beliebigen, sowohl von der Zeit wie von der vertikalen Koordinate abhängigen Wert $u(t, y)$ zu erteilen, wobei wir der Einfachheit halber voraussetzen werden, daß $u(t, y)$ von der Form: $f(t) \cdot F(y)$ sei. Es wird verlangt, die im Kanal hervorgerufene stationäre Wellenbewegung zu bestimmen, unter den Annahmen, 1. daß alle Geschwindigkeiten als klein betrachtet werden dürfen, so daß die gewöhnliche lineare Theorie verwendet werden kann, 2. daß die Wellenbewegung nur in zwei Dimensionen vor sich geht.

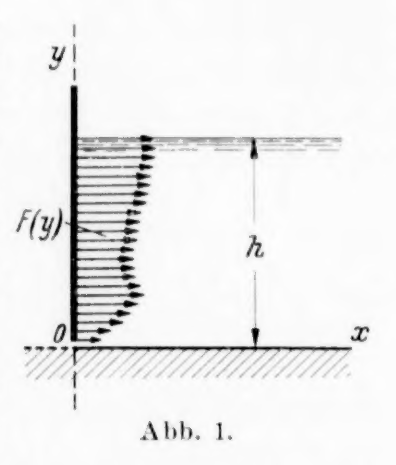


Abb. 1.

Unter Bezugnahme auf Abb. 1 läßt sich das Problem wie folgt formulieren: Es wird eine Potentialfunktion $\Phi(x, y, t)$ gesucht, die den Bedingungen genügt:

$$\text{im Innern des Feldes: } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad (1),$$

$$\text{an der Grenze } x=0: \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u = f(t) \cdot F(y) \quad \ldots \quad (2),$$

$$\text{an der Grenze } y=0: \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (3),$$

an der Grenze $y=h$

$$\text{(d. h. an der freien Oberfläche): } \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad \ldots \quad (4).$$

Statt der willkürlichen Funktion $f(t)$ werden wir die harmonische Funktion $f(t) = e^{i\nu t}$ wählen, weil nach der Theorie der Fourierintegrale im allgemeinen jede Zeitfunktion sich aus harmonischen Komponenten zusammensetzen läßt. Das Potential Φ wird dann $e^{i\nu t}$ als Faktor besitzen; wir schreiben deshalb:

$$\Phi = e^{i\nu t} \varphi(x, y) \quad \ldots \quad (5).$$

Die Funktion φ, welche innerhalb des Feldes der Gl. (1) unterworfen ist, hat jetzt folgende Randbedingungen zu erfüllen:

$$\text{an den Grenzen: } x=0: \frac{\partial \varphi}{\partial x} = F(y) \ldots (6); \quad y=0: \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \ldots (7); \quad y=h: \nu^2 \varphi = g \frac{\partial \varphi}{\partial y} \ldots (8).$$

2. Wir können versuchen, eine Funktion φ, welche die aufgezählten Bedingungen erfüllt, in der folgenden Weise aufzubauen:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 \quad \ldots \quad (9),$$

wo:

$$\varphi_1 = (A\, e^{-ikx} + B\, e^{+ikx}) \cosh k y \quad \ldots \quad (10\text{a}),$$

$$\varphi_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{2m+1} e^{-(2m+1)\pi x/2h} \cos \frac{(2m+1)\pi y}{2h} \ldots (10\text{b}), \quad \varphi_3 = \int_0^{\infty} d\mu\, s(\mu) \cos \mu x \cosh \mu y \ldots (10\text{c}).$$

Jeder Teil genügt für sich der Laplaceschen Gleichung sowie der Bedingung (7).

Der erste Teil, φ_1, stellt ein System von zwei laufenden Wellen dar, welche entgegengesetzte Fortpflanzungsrichtungen haben. Dieser Teil wird für sich die Bedingung (8) erfüllen, falls:

$$\nu^2 = g k \operatorname{tgh} k h \quad \ldots \quad (11),$$

was die bekannte Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ergibt. Dagegen verletzt φ_1 die Bedingung (6).

Der Teil φ_2, der für $y=h$ gleich Null wird und deshalb in gewissem Sinne als das Potential einer Strömung von der Wand $x=0$ nach der freien Oberfläche (oder umgekehrt) gedeutet werden kann, soll nun so bestimmt werden, daß die Summe $\varphi_1+\varphi_2$ gerade der Bedingung (6) genügt (es ist zu bemerken, daß die Ableitung $\partial\varphi_3/\partial x$ für $x=0$ zu Null wird, so daß der dritte Teil φ_3 nichts zu der Gl. (6) beiträgt). Wir erhalten also die Beziehung:

$$-\sum\frac{\pi a_m}{2h}\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2h}=F(y)+ik(A-B)\cosh ky\,.$$

Betrachten wir A und B für einen Augenblick als gegeben, so lassen sich die Koeffizienten a_m hieraus bestimmen. Wir schreiben zur Abkürzung:

$$\beta_m'=\frac{1}{h}\int_0^h d\,y\,F(y)\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2h}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(12\text{a}),$$

$$\beta_m''=\frac{1}{h}\int_0^h d\,y\cosh ky\cos\frac{(2m+1)\pi y}{2h}=\frac{2}{\pi}\,\frac{(-1)^m(2m+1)\cosh kh}{(2m+1)^2+(2kh/\pi)^2}\quad\ldots\quad(12\text{b})$$

und erhalten dann:

$$a_m=-4h/\pi\cdot\{\beta_m'+ik(A-B)\beta_m''\}\,.\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(13).$$

Die Funktion φ_2, für sich genommen, verletzt nun aber die Bedingung (8). Es muß deshalb die durch φ_3 dargestellte Bewegung so gewählt werden, daß die Summe $\varphi_2+\varphi_3$ der Gl. (8) genügt. Mit der Bezeichnung:

$$S(\mu)=s(\mu)\cdot\{\nu^2\cosh\mu h-g\mu\sinh\mu h\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(14)$$

führt diese Forderung zu der Beziehung:

$$-\frac{\pi g}{2h}\sum(-1)^m a_m\,e^{-(2m+1)\pi x/2h}=\int_0^\infty d\,\mu\,S(\mu)\cos\mu x\quad\ldots\ldots\quad(15),$$

woraus sich nach der Theorie der Fourierintegrale ergibt:

$$S(\mu)=-\frac{g}{h}\sum(-1)^m a_m\int_0^\infty d\,x\cos\mu x\,e^{-(2m+1)\pi x/2h}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(16).$$

Ist hieraus S gefunden, so erhält man s aus (14).

Nun wird aber der Klammerausdruck in (14) gleich Null für $\mu=k$; es kann also $s(k)$ nur dann einen endlichen Wert erhalten, falls $S(k)$ gleich Null ist. Dieses Resultat führt zu der Beziehung:

$$\sum(-1)^m a_m\int_0^\infty d\,x\cos kx\,e^{-(2m+1)\pi x/2h}=0\quad\ldots\ldots\ldots\quad(17).$$

Das hierin auftretende Integral hat den Wert:

$$\int_0^\infty d\,x\cos kx\,e^{-(2m+1)\pi x/2h}=\frac{(-1)^m h\beta_m''}{\cosh kh}\,.$$

Führen wir den Ausdruck (13) für die a_m ein, so geht (17) (nach Kürzung eines unwesentlichen Faktors) über in:

$$\sum\{\beta_m'\beta_m''+ik(A-B)(\beta_m'')^2\}=0\,,$$

woraus folgt:

$$A-B=\frac{i}{k}\,\frac{\sum\beta_m'\beta_m''}{\sum(\beta_m'')^2}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(18).$$

Die beiden Reihensummen können berechnet werden; man findet:

$$\sum\beta_m'\beta_m''=\frac{1}{2h}\int_0^h d\,y\,F(y)\cosh ky,$$

wofür wir $N/2$ schreiben werden, und weiter:

$$\sum (\beta_m'')^2 = \frac{1}{2h}\int_0^h dy \cosh^2 ky = \frac{\sinh 2kh + 2kh}{8kh},$$

so daß schließlich:

$$A - B = \frac{4iNh}{\sinh 2kh + 2kh} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (19).$$

3. Es zeigt sich, daß unsere Rechnung nur die Differenz der beiden Größen A und B liefert. Der Grund dafür ist nicht schwer anzugeben: es ist nämlich bis jetzt nichts über die energetischen Verhältnisse ausgesagt worden, und es läßt sich ebensogut der Fall $B = 0$ denken, wo nur in der positiven x-Richtung fortschreitende Wellen auftreten, mit Energieabfluß nach dem Unendlichen, als der Fall $A = 0$, mit aus dem Unendlichen auf die bewegte Wand zulaufenden Wellen, deren Energie dann durch die Wand aufgenommen wird; auch eine Superposition beider Fälle wäre denkbar. Es ist schon von rein kinematischem Standpunkte zu bemerken, daß eine Funktion φ_1 mit $A = B =$ beliebige komplexe Zahl, welche eine freie stehende Wellenbewegung darstellt, außer den Bedingungen (7) und (8) noch die Bedingung:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0 \text{ an der Grenze } x = 0$$

erfüllt, und also im Prinzip auf jede Lösung superponiert werden kann.

Die energetischen Verhältnisse lassen sich überblicken, indem man die Arbeitsleistung der bewegten Wand untersucht, welche, nachdem man von der komplexen Darstellungsweise zu reellen Größen zurückgegangen ist, durch das Integral:

$$\int_0^h dy\, p\, u = -\varrho \int_0^h dy \frac{\partial \Phi}{\partial t} u$$

bestimmt wird (ϱ ist die Dichte der Flüssigkeit). Wir werden auf die diesbezüglichen Rechnungen nicht eingehen, doch bemerken, daß sie zu einer Phasenrelation für die eventuell zu superponierende stehende Wellenbewegung führen.

Es ist zu beachten, daß, obwohl mit den oben abgeleiteten Formeln die prinzipielle Berechenbarkeit des Problems dargetan ist, die Auswertung noch zu beträchtlichen rechnerischen Schwierigkeiten führen kann, die noch vermehrt werden, wenn man vermittelst Fourierintegrale nach ν von der einfachen harmonischen Bewegung zu mehr allgemeinen Bewegungstypen hinübergehen will. Vom praktischen Standpunkt wären namentlich die Bestimmung der maximalen Wassererhebung an der bewegten Wand und die Ermittlung der jeweiligen auf diese Wand auszuübenden Kräfte von Interesse.

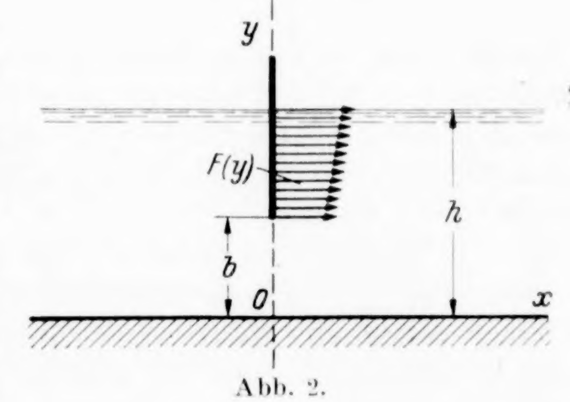


Abb. 2.

4. Es sei gestattet, noch eine kurze Bemerkung zu machen über das weitaus schwierigere Problem, das sich erhebt, wenn die Wand in $x = 0$ nicht bis zum Kanalboden herabreicht (vgl. Abb. 2), so daß auch die Wasserbewegung für negative Werte von x in Betracht gezogen werden muß. Es können dabei noch zwei Fälle unterschieden werden, je nachdem man den Kanal auch in der negativen x-Richtung als unendlich lang annimmt, oder ihn in dieser Richtung als von endlicher Länge betrachtet. Wählen wir den Fall, wo das linke Kanalende in $x = -l$ durch eine vertikale Wand abgeschlossen ist (vgl. Abb. 3), so daß hier einfache Reflexion der Wellen ohne Energieverlust auftritt, dann wird, wenn wir wieder eine rein harmonische Bewegung der Scheidewand in $x = 0$ voraussetzen, in dem abgeschlossenen Kanalteil eine stehende Wellenbewegung auftreten. Nehmen wir auf der anderen Seite der Scheidewand nur in der positiven x-Richtung fortlaufende Wellen an, so kommen wir dazu, zu versuchen, als erstes Glied φ_1 in dem Ausdruck für das Potential:

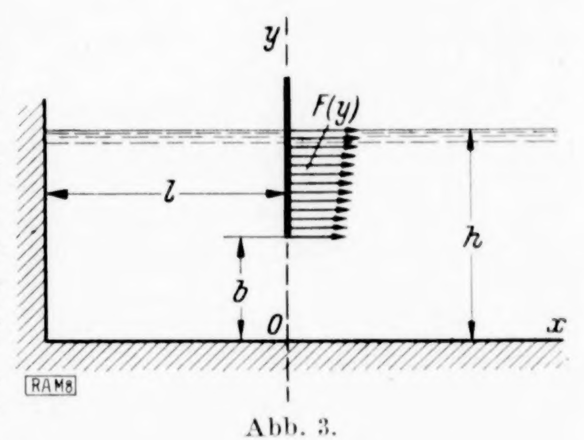


Abb. 3.

$$\Phi = e^{i\nu t}\varphi = e^{i\nu t}(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots)$$

die folgende diskontinuierliche Funktion zu wählen:

$$x < 0: \quad \varphi_1'' = \frac{iA}{\sin kl}\cos k(l + x)\cosh ky \quad \ldots \ldots \ldots (20\text{a}),$$

$$x > 0: \quad \varphi_1' = A\, e^{-ikx}\cosh ky \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (20\text{b}).$$

Diese Ausdrücke sind so bestimmt, daß die Bedingungen (7) und (8) erfüllt werden und zudem die Bedingung:

$$\frac{\partial \varphi_1''}{\partial x} = 0 \text{ in } x = -l \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (21),$$

während in $x = 0$ die Beziehung besteht:

$$\frac{\partial \varphi_1'}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_1''}{\partial x} = -i\,k\,A \cosh k\,y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22).$$

Wenn die bewegte Scheidewand bis zur Tiefe $h - b$ (d. h. $y = b$) herabreicht, dann zeigt die aus φ_1 abgeleitete Horizontalkomponente der Geschwindigkeit in dem Spalt unter dieser Wand keinen Sprung; wohl existiert eine Diskontinuität in dem Wert von φ_1 selber, welche Sprünge in der Vertikalkomponente der Geschwindigkeit und in dem Druck zur Folge hat.

Wir denken uns nun vorläufig die Scheidewand bis zum Kanalboden fortgesetzt und für $y < b$ mit einer beliebigen Geschwindigkeit:

$$u = e^{i\nu t} F^*(y)$$

bewegt. Die beiden Kanalteile werden dann getrennt und können jeder für sich behandelt werden. Für $x > 0$ geht die Berechnung der zusätzlichen Funktionen φ_2', φ_3' nach § 2; für $x < 0$ ist dagegen wegen der endlichen Länge dieses Kanalteils eine etwas abgeänderte Berechnung erforderlich, wobei für φ_2'', bzw. φ_3'', Reihenentwicklungen von der Form:

$$\varphi_2'' = \sum \frac{a_m^*}{2\,m+1} \cosh \frac{(2\,m+1)\,\pi\,(l+x)}{2\,h} \cos \frac{(2\,m+1)\,\pi\,y}{2\,h}, \quad \varphi_3'' = \sum s_n \cos \frac{\pi\,n\,x}{l} \cosh \frac{\pi\,n\,y}{l}$$

angenommen werden müssen. Wenn $k\,l/\pi$ nicht gerade eine ganze Zahl ist, so tritt bei der Berechnung der Koeffizienten s_n keine Resonanzgefahr auf; im Kanalteil auf der positiven Seite haben wir wieder die Bedingung (17), die den Wert von A bestimmt.

Wir schreiben jetzt:

$$\text{für } x > 0: \quad \psi' = \varphi_1' + \varphi_2' + \varphi_3'; \qquad \text{für } x < 0: \quad \psi'' = \varphi_1'' + \varphi_2'' + \varphi_3''.$$

Machen wir nun den Spalt von $y = 0$ bis $y = b$ wieder frei, so ist hier: $\partial \psi'/\partial x = \partial \psi''/\partial x$, während ψ selbst sich im allgemeinen diskontinuierlich verhalten wird. Es mußte nun die noch unbestimmt gelassene Funktion $F^*(y)$ so gewählt werden, daß diese Diskontinuität verschwinden würde (wozu im allgemeinen ein komplexer Wert von $F^*(y)$ erforderlich sein würde).

Es läßt sich erwarten, daß die Gleichung, wodurch die Funktion $F^*(y)$ bestimmt werden muß, eine verwickelte Gestalt erhalten wird. Man kann darum vielleicht auch in folgender Weise vorgehen: Für $F^*(y)$ wird irgendein Wert angenommen, z. B. Null, oder $-i\,k\,A \cosh k\,y$; die Koeffizienten von φ_2' und φ_2'' werden berechnet, während jedoch die Funktion $s(\mu)$ in φ_3' und die Koeffizienten s_n in φ_3'' noch unbestimmt gelassen werden; ebenso wird der Wert von A noch unbestimmt gelassen. Weiter schreiben wir für den Sprung der Funktion ψ im Spalt: $\Gamma(y) = \psi' - \psi''$.

Es muß dann ein Potential gesucht werden, das diese Diskontinuität gerade wieder aufhebt. Dazu führen wir erstens im Spalt eine Wirbelschicht ein, mit der Wirbelstärke:

$$e^{i\nu t}\gamma = -e^{i\nu t}\frac{d\Gamma}{d\,y},$$

und bestimmen zu dieser Wirbelverteilung ein Potential $e^{i\nu t}\varphi_4$, das die Bedingungen erfüllt:

$$\text{für } y = 0: \frac{\partial \varphi_4}{\partial y} = 0, \quad \text{für } x = 0,\ h > y > b: \frac{\partial \varphi_4}{\partial x} = 0 \text{ (auf beiden Seiten)},$$

und das im Unendlichen verschwindet. Wenn die Spalthöhe b gering ist im Vergleich zu h und l, dann kann man eine Näherung für φ_4 bestimmen, indem man h und l als unendlich betrachtet; das in dieser Weise vereinfachte Problem läßt sich mit Hilfe einer konformen Abbildung lösen. In diesem Fall darf man überdies annehmen, daß die vom Potential φ_4 herrührenden Geschwindigkeiten sich an der Wasseroberfläche nicht bemerkbar machen werden, so daß sie keinen Einfluß auf die Wellenbewegung haben und nicht weiter berücksichtigt zu werden brauchen.

Das Potential φ_4 wird im Spalt eine Diskontinuität $-\Gamma_1$ besitzen, die im allgemeinen nicht gleich $-\Gamma$ sein wird; die Differenz $\Gamma_0 = \Gamma - \Gamma_1$ muß aber eine konstante sein. Wir bestimmen nun ein Potential φ_5, das an der Wasseroberfläche im abgeschlossenen Kanalteil den Wert $-\Gamma_0$ hat, und an der Wasseroberfläche im rechten Kanalteil den Wert Null. Ein

derartiges Potential bestimmt eine Strömung durch den Spalt, die sich für den Fall, daß man l als sehr groß ansieht, ebenfalls mit Hilfe einer konformen Abbildung errechnen läßt (auch der Fall eines endlichen Wertes von l wäre durchführbar; man kommt in beiden Fällen auf elliptische Funktionen).

Zu diesem Potential φ_5 fügen wir nun im abgeschlossenen Kanalteil noch den konstanten Betrag Γ_0 hinzu; die so erhaltene Funktion hat dann die gerade uns noch fehlende konstante Diskontinuität $-\Gamma_0$ im Spalt, während sie an der ganzen Wasseroberfläche den Wert Null hat. Weil aber $\partial \varphi_5 / \partial y$ im allgemeinen an der Wasseroberfläche nicht gleich Null sein wird, so macht unsere Funktion noch einen Verstoß gegen die Bedingung (8). Es muß deshalb die Funktion $\varphi_3{}'$ im rechten Kanalteil, bzw. $\varphi_3{}''$ im linken Kanalteil, so bestimmt werden, daß die Summe $\varphi_2{}' + \varphi_3{}' + \varphi_5$, bzw. $\varphi_2{}'' + \varphi_3{}'' + \varphi_5 + \Gamma_0$ die Bedingung (8) erfüllt. — Hieraus erhält man schließlich auch die Gleichung für A, und es muß sich zeigen, daß die für F^* getroffene Wahl in das Endresultat nicht hineingeht. Kompliziert werden die Rechnungen allerdings; es wäre aber möglich, daß man durch aufeinanderfolgende Approximationen schrittweise zu einem brauchbaren Resultat kommen könnte.

Experimentelle Beobachtungen über einen derartigen Fall haben gezeigt, daß man nur dann eine regelmäßige Wellenbewegung erhielt, wenn die Länge l des abgeschlossenen Kanalteils eine ungerade Anzahl Viertelwellenlängen betrug, so daß sich an der bewegten Wand ein Knoten der Vertikalbewegung (und also des Druckes) einstellte. In abweichenden Fällen nahm die Höhe der Wellen im abgeschlossenen Kanalteil so sehr zu, daß Fortspritzen des Wassers, unregelmäßige Bewegungen und derartiges auftraten. Ob die oben skizzierte Rechnungsmethode zu einer bestimmten Vorschrift für die Größe von l führt, läßt sich aus den allgemeinen Darlegungen nicht erblicken; ich habe keine Anweisung dafür gefunden. Wohl ist es, wie schon oben bemerkt worden, erforderlich, daß nicht $k\,l/\pi$ gleich einer ganzen Zahl wird, weil sonst unter den Koeffizienten s_n einer unendlich wird. Zudem ist aus der Formel (20a) ersichtlich, daß bei gegebenem Wert von A die Amplitude der stehenden Welle ein Minimum wird für $k\,l = \frac{(2n+1)\pi}{2}$. M 8

Der Schlitten.

Von *C. Carathéodory* in München.

1. Die nichtholonomen Bewegungen der Mechanik werden bekanntlich durch Reibungskräfte verursacht. Weniger bekannt ist aber, daß nicht alle möglichen Arten von Reibungskräften, von denen man annehmen könnte, daß sie derartige Bewegungen erzeugen, in gleichem Maße brauchbar sind. Wir wollen im folgenden das einfachste Beispiel untersuchen, an welchem man die Richtigkeit dieser Bemerkung verifizieren kann.

2. Aufstellung des Problems. Ein zweidimensionales starres System von Massenpunkten, mit dem die rechtwinkeligen Achsen (ξ, η) fest verbunden sein sollen, gleitet auf seiner Ebene. Der Schwerpunkt G dieses Systems habe die Koordinaten $(a, 0)$, das Trägheitsmoment in G werde mit J_0, die Gesamtmasse des Systems mit M bezeichnet. Wir nehmen an, daß die einzige in Betracht kommende äußere Kraft eine Reaktionskraft R ist, die längs der η-Achse wirkt. Zwischen den Projektionen (u, v) der absoluten Geschwindigkeit des Anfangspunktes unserer Koordinaten längs der ξ- bzw. der η-Achse und der Rotationsgeschwindigkeit ω bestehen dann die Differentialgleichungen

$$\dot u - \omega v - \omega^2 a = 0 \quad . \quad . \quad (2.1) \qquad M(\dot v + \dot\omega a + \omega u) = R \quad . \quad . \quad (2.2) \qquad J_0\, \dot\omega = -R\, a \quad . \quad . \quad (2.3).$$

Setzt man zur Abkürzung

$$k^2 = 1 + \frac{J_0}{M a^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.4),$$

so ist die dimensionslose Zahl k eine Konstante des Systems, die immer größer als Eins ist, außer in dem Grenzfalle, in dem die ganze Masse im Schwerpunkte G konzentriert ist.

Durch Elimination von R zwischen (2.2) und (2.3) erhält man mit Benutzung von (2.4)

$$\dot v + a\, k^2\, \dot\omega + \omega\, u = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.5).$$

Die Größe der kinetischen Energie T berechnet man aus der Gleichung

$$2\,T = M(u^2 + (v + \omega a)^2) + J_0\, \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2.6).$$

Durch Differentiation nach der Zeit folgt hieraus

$$\dot{T} = M(u\,\dot{u} + (v + \omega\,a)(\dot{v} + \dot{\omega}\,a)) + J_0\,\omega\,\dot{\omega}\,,$$

oder, wenn man die Gl. (2.1) bis (2.3) benutzt,

$$\dot{T} = M\,u\,(\omega\,v + \omega^2\,a) + (v + \omega\,a)(R - M\,\omega\,u) - R\,a\,\omega\,,$$

und dieser Ausdruck reduziert sich auf

$$\dot{T} = R\,v \qquad (2.7).$$

3. Bewegungsgleichungen des Schlittens. Die Bewegung eines schweren Schlittens, der auf einer horizontalen Ebene ohne Einwirkung von äußeren Kräften gleitet, kann als ebenes mechanische Problem von der Art des vorhergehenden behandelt werden. Die ξ-Achse, die die horizontale Projektion G des Schwerpunkts des Schlittens enthält, soll eine Symmetrieachse des Schlittens sein, und einen Stützpunkt enthalten, der nicht im Anfangspunkt der Koordinaten liegt und der reibungslos auf der Ebene gleitet. Die Kufen des Schlittens sollen die $\xi\,\eta$-Ebene in Punkten der η-Achse berühren und diese senkrecht schneiden. Ihre Einwirkung auf die Bewegung des Systems besteht darin, daß ein Ausgleiten der Kufenachse in Richtung der mit ihr fest verbundenen η-Achse verhindert wird. Man erhält also die Bewegungsgleichungen des Schlittens, indem man in den vorigen Gleichungen die Reaktionskraft R jeweils so bemißt, daß die Bedingung

$$v = 0 \qquad (3.1)$$

besteht.

In diesem Falle reduzieren sich die Gl. (2.1) und (2.5) auf die folgenden

$$\dot{u} = a\,\omega^2 \quad (3.2), \qquad a\,k^2\,\frac{\dot{\omega}}{\omega} + u = 0 \quad (3.3).$$

Man kann versuchen, diesen beiden Gleichungen eine mechanische Interpretation zu geben. Die erste besagt, daß die lineare Beschleunigung des Anfangspunktes der Koordinaten auch erhalten werden kann, indem man auf einen Punkt von Masse M eine Kraft wirken läßt, die gleich der Spannung eines Fadens von der Länge a ist, an dessen Ende ein Punkt von derselben Masse M mit der Winkelgeschwindigkeit ω sich im Kreise bewegt.

Die zweite Gleichung erlaubt, wenn man sie mit Hilfe von (2.3) und (2.4) in der Gestalt

$$R = M \cdot \frac{J_0}{J_0 + M\,a^2}\left(\frac{u}{\omega}\right)\omega^2$$

schreibt, die Reaktionskraft R auf ähnliche Weise durch eine Zentrifugalkraft zu messen. Hierbei muß die Masse M im Verhältnis $J_0 : (J_0 + M\,a^2)$ reduziert werden; die Länge $u:\omega$ des Fadens ist gleich dem Abstand des instantanen Drehzentrums von der Symmetrieachse des Schlittens, und die Winkelgeschwindigkeit ist wieder gleich ω.

4. Integration der Differentialgleichungen. Aus (3.2) und (3.3) folgt die Gleichung

$$k^2\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right) + \omega^2 = 0 \qquad (4.1),$$

die nach Multiplikation mit $\dot{\omega}:\omega$ integriert werden kann. Man erhält auf diese Weise nach Einführung einer Integrationskonstanten c

$$k^2\left(\frac{\dot{\omega}}{\omega}\right)^2 = k^2\,c^2 - \omega^2 \qquad (4.2).$$

Es ist nun bequem, ehe man die Integration zu Ende führt, einen neuen Parameter ψ durch die Gleichung

$$\omega = k\,c \cdot \cos\psi \qquad (4.3)$$

zu definieren. Das Vorzeichen von c kann, weil in (4.2) nur c^2 vorkommt, so gewählt werden, daß in einem gewissen Zeitintervall $\cos\psi > 0$ ist. Hierauf folgt aus (4.2), wenn man auch das Vorzeichen von ψ geeignet wählt,

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -c \cdot \sin\psi \qquad (4.4),$$

und durch gliedweise Multiplikation der beiden letzten Gleichungen miteinander

$$\dot{\omega} = -\frac{k\,c^2}{2}\sin 2\psi \qquad (4.5).$$

Aus (3.3) und (4.4) folgt nunmehr

$$u = a\,k^2\,c \sin\psi \quad \ldots \ldots \quad (4.6),$$

und aus (3.2) und (4.3)

$$\dot u = a\,k^2\,c^2 \cos^2\psi \quad \ldots \ldots \quad (4.7).$$

Endlich berechnet man aus (2.3) und (4.5) die Reaktionskraft R, indem man setzt

$$R = \frac{1}{2a} J_0\,k\,c^2 \sin 2\psi \quad \ldots \ldots \quad (4.8),$$

und dieses kann, wegen (2.4), auch geschrieben werden

$$R = {}^1/_2\, M\,a\,k\,(k^2 - 1)\,c^2 \sin 2\psi \quad \ldots \ldots \quad (4.9)$$

Aus (2.7) und (3.1) entnimmt man, daß die kinetische Energie konstant ist. Setzt man in (2.6) die soeben gefundenen Werte für u und ω und außerdem $v = 0$, so erhält man in der Tat

$$2\,T = M\,a^2\,k^4\,c^2 \quad \ldots \ldots \quad (4.10).$$

5. Es bleibt also nur noch ψ als Funktion von t auszudrücken, um die Integration zu beenden. Zu diesem Zweck differentiieren wir (4.3) nach der Zeit und erhalten

$$\dot\omega = -k\,c \sin\psi \cdot \dot\psi \quad \ldots \ldots \quad (5.1)$$

woraus nach (4.4) folgt

$$\omega = k\,\dot\psi \quad \ldots \ldots \quad (5.2).$$

Nach (4.3) ist nunmehr

$$\dot\psi = c \cos\psi \quad \ldots \ldots \quad (5.3)$$

und, bei geeigneter Wahl des Ursprungs der Zeit,

$$c\,t = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\cos\psi} = \frac{1}{2}\,l\,\frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi}.$$

Wir können demnach schreiben

$$\sin\psi = \frac{e^{c\,t} - e^{-c\,t}}{e^{c\,t} + e^{-c\,t}} \quad \ldots \ldots \quad (5.4), \qquad \cos\psi = \frac{2}{e^{c\,t} + e^{-c\,t}} \quad \ldots \ldots \quad (5.5),$$

woraus insbesondere nachträglich folgt, daß $\cos\psi$, sogar während des ganzen Verlaufs der Bewegung, bei welchem ψ monoton von $-\frac{\pi}{2}$ bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, sein Vorzeichen nicht ändert.

6. Bestimmung der Bahnkurven. Setzt man

$$\vartheta = k\,\psi \quad \ldots \ldots \quad (6.1), \qquad \text{so folgt aus (5.2)} \quad \dot\vartheta = \omega \quad \ldots \ldots \quad (6.2),$$

so daß ϑ den Winkel darstellt, den die Symmetrieachse des Schlittens mit einer festen x-Achse bildet. Um die Bahnkurve zu finden, die der mit dem Schlitten fest verbundene Punkt $\xi = \eta = 0$ in dieser $x\,y$-Ebene beschreibt, muß man demnach setzen

$$\dot x = u \cos\vartheta\,, \quad \dot y = u \sin\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (6.3).$$

Es ist aber bequemer, diese Bahn wieder mit Hilfe des Parameters ψ zu berechnen. Man findet z. B., indem man unsere früheren Formeln benutzt,

$$\frac{d\,x}{d\,\psi} = \frac{u \cos\vartheta}{\dot\psi} = \frac{a\,c\,k^2 \sin\psi \cos k\,\psi}{c \cdot \cos\psi},$$

so daß man auf diese Weise erhält

$$\frac{d\,x}{d\,\psi} = a\,k^2 \operatorname{tg}\psi \cos k\,\psi\,, \quad \frac{d\,y}{d\,\psi} = a\,k^2 \operatorname{tg}\psi \sin k\,\psi \qquad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2} \quad \ldots \quad (6.4).$$

Man sieht, die Gestalt der Bahnkurven hängt nur von k ab, ihre Größe bei gegebenem k nur von a.

Für einen gegebenen Schlitten sind alle Bahnen kongruent, und die Geschwindigkeit, mit der sie durchlaufen werden, in entsprechenden Punkten proportional zu c, oder, was dasselbe ist, zu $\sqrt{T}$.

7. Es ist sehr leicht, die natürlichen Gleichungen für diese Bahnkurven zu erhalten. Bezeichnet man nämlich die Bogenlänge mit s, so folgt für positive ψ aus (6.4)

$$\frac{ds}{d\psi} = a k^2 \operatorname{tg} \psi \qquad (7.1),$$

und hieraus erhält man

$$\cos \psi = e^{-\frac{s}{a k^2}} \qquad (7.2).$$

Andererseits hat das instantane Drehzentrum die Koordinaten

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{u}{\omega} = a k \operatorname{tg} \psi \qquad (7.3),$$

und man folgert hieraus, daß in jedem Punkte der Bahn der Krümmungsradius

$$\varrho = a k \operatorname{tg} \psi \qquad (7.4)$$

ist. Aus (7.2) und (7.4) folgt nunmehr

$$a^2 k^2 \cdot e^{\frac{2s}{a k^2}} = \varrho^2 + a^2 k^2 \qquad (7.5),$$

d. h. die natürliche Gleichung, die wir berechnen wollten.

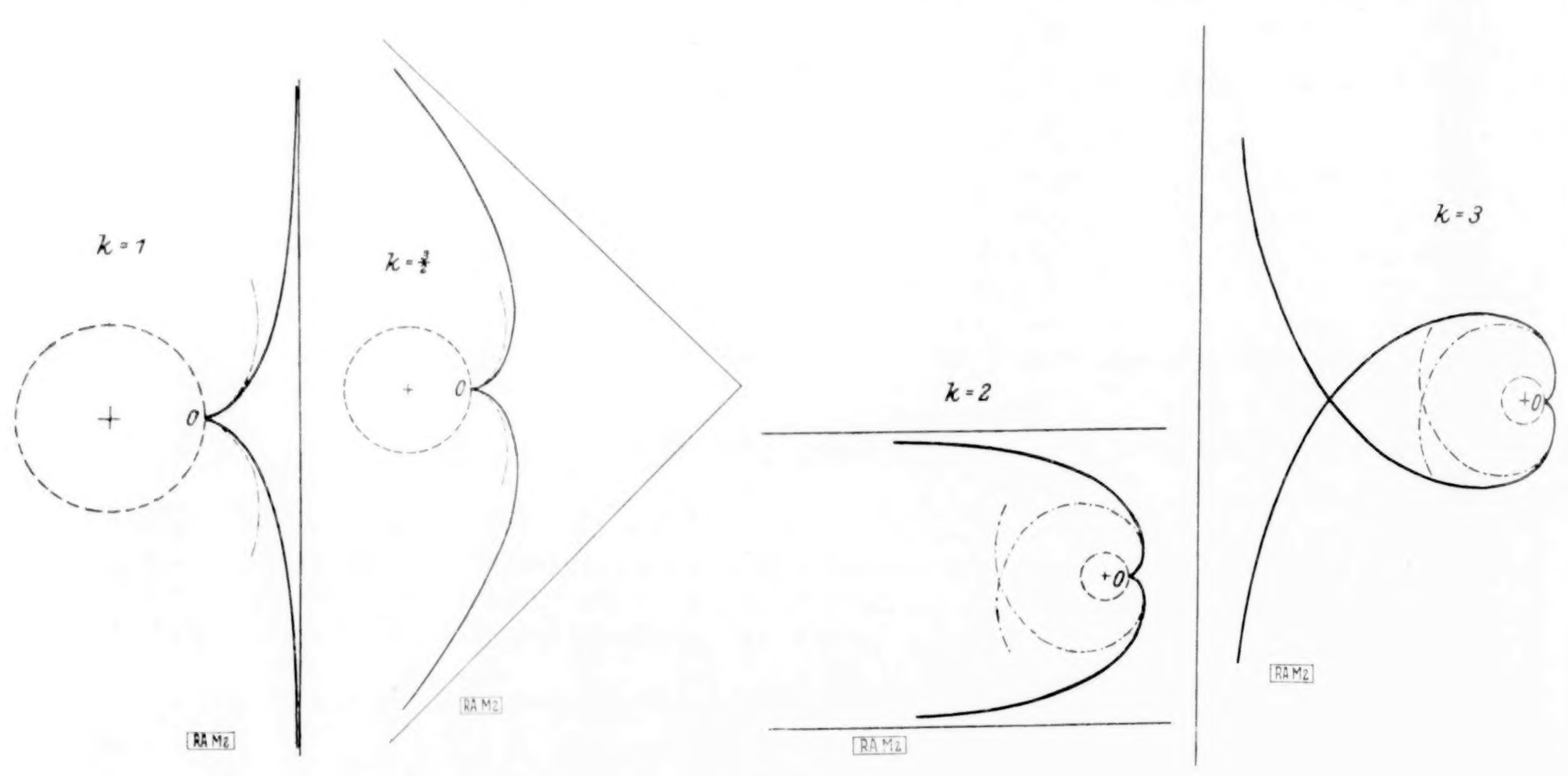


Abb. 1 bis 4.

8. Die Evoluten der Bahnkurven, die durch Integration der Differentialgleichungen (6.4) entstehen, werden durch die Gleichungen

$$\bar{x}(\psi) = x(\psi) - \varrho \sin k \psi, \quad \bar{y}(\psi) = y(\psi) + \varrho \cos k \psi$$

berechnet. Sie genügen ihrerseits den Differentialgleichungen

$$\frac{d\bar{x}}{d\psi} = -a k \frac{\sin k \psi}{\cos^2 \psi}, \quad \frac{d\bar{y}}{d\psi} = a k \frac{\cos k \psi}{\cos^2 \psi} \qquad (8.1).$$

Für die Bogenlänge $\bar{s}$ und den Krümmungsradius $\bar{\varrho}$ dieser Kurven findet man, wenn man $\bar{s}$ vom Punkte $\psi = 0$ aus berechnet,

$$\bar{s} = a k \operatorname{tg} \psi \qquad (8.2), \qquad \bar{\varrho} = \frac{a}{\cos^2 \psi} \qquad (8.3).$$

Zwischen $\bar{\varrho}$ und $\bar{s}$ besteht also die Relation

$$\bar{\varrho} = a\left(1 + \frac{\bar{s}^2}{a^2 k^2}\right) \qquad (8.4).$$

Es ist sehr bemerkenswert, daß die Gl. (8.3) unabhängig von k ist. Insbesondere findet man $\varrho(0)=a$, und, da unsere Bahnkurven für $\psi=0$ eine Spitze besitzen, folgt hieraus, daß sie sich in der Nähe dieser Spitze von der Evolvente eines Kreises vom Radius a nur unmerklich unterscheiden. Ferner zeigt die Gl. (8.4), daß, wenn k wächst, immer größere Stücke unserer Bahnkurven von dieser festen Kreisevolvente gut approximiert werden. Diese Tatsache wird durch die Abb. 1 bis 4, in denen die Schlittenbahn für $k=1, \frac{3}{2}$, 2 und 3 dargestellt wird, und in denen auch die Kreisevolvente eingezeichnet ist, sehr gut illustriert.

Für $k=1$ stellt die Kurve (8.1) eine Kettenlinie und die Bahnkurve (6.4) eine Traktrix dar. Diese letzte Eigenschaft kann man auch leicht auf folgendem Wege einsehen: der Punkt auf der Symmetrieachse des Schlittens, der die Entfernung ak von der Kufenachse hat, beschreibt die Kurve

$$x_1 = x + ak\cos k\psi, \quad y_1 = y + ak\sin k\psi \quad \ldots \quad (8.5),$$

und es ist daher

$$\frac{dx_1}{d\psi} = -ak^2\frac{\sin(k-1)\psi}{\cos\psi}, \quad \frac{dy_1}{d\psi} = ak^2\frac{\cos(k-1)\psi}{\cos\psi} \quad \ldots \quad (8.5)$$

Für $k=1$ stellt aber die Kurve (8.5) eine Gerade dar.

9. Die Bahnkurven (6.4) haben zwei Asymptoten, die mit der x-Achse den Winkel $\pm k\frac{\pi}{2}$ einschließen. Dreht man z. B. das Koordinatensystem, bei Festhalten des Anfangspunktes, um einen Winkel $\frac{k\pi}{2}$, so kann man schreiben

$$X = x\sin\frac{k\pi}{2} - y\cos\frac{k\pi}{2} \quad \ldots \quad (9.1), \qquad Y = x\cos\frac{k\pi}{2} + y\sin\frac{k\pi}{2} \quad \ldots \quad (9.2).$$

Durch Differentiation von (9.1) nach ψ erhält man

$$\frac{dX}{d\psi} = ak^2\sin\psi\frac{\sin k\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)} \quad \ldots \quad (9.3).$$

Ebenso findet man, wenn man

$$Y = ack^2t + \overline{Y} \quad \ldots \quad (9.4)$$

setzt, nach einigen Umformungen

$$\frac{d\overline{Y}}{d\psi} = -ak^2\frac{\sin^2\frac{k+1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)+\sin^2\frac{k-1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right)} \quad \ldots \quad (9.5).$$

Hieraus folgt, daß sowohl X wie auch $\overline{Y}$ im Intervall $0 \leqq \psi < \frac{\pi}{2}$ beschränkt bleiben, woraus man nicht nur die Existenz der Asymptote ableitet, sondern auch die Tatsache, daß ein Punkt, der sich auf dieser Asymptote mit der Geschwindigkeit ack^2 bewegt, für alle positiven t eine Entfernung vom Schlitten besitzt, die unterhalb einer endlichen Schranke liegt.

10. Physikalische Realisierung der Reaktionskräfte. Wir wollen nun zeigen, daß es nicht möglich ist, die Bewegung des Schlittens dadurch zu approximieren, daß man die Reaktionskraft R als Reibungskraft ansieht, von der Art, wie sie bei Bewegungen in zähen Flüssigkeiten angenommen wird. Man müßte hierzu in den Bewegungsgleichungen des § 2 die Größe $R=-Nv$ setzen, wobei N eine große Zahl bedeuten soll. Setzt man nun

$$\frac{J_0}{Na^2} = \varepsilon, \quad v = a\varepsilon\dot{\omega} \quad \ldots \quad (10.1),$$

so gehen die Gl. (2.1) und (2.5) in folgende über:

$$\dot{u} = a\omega^2 + a\varepsilon\omega\dot{\omega} \quad \ldots \quad (10.2), \qquad ak^2\frac{\dot{\omega}}{\omega} + u = -a\varepsilon\frac{\ddot{\omega}}{\omega} \quad \ldots \quad (10.3),$$

und diese Gleichungen gehen für $\varepsilon=0$ tatsächlich in (3.2) und (3.3) über.

Sucht man sie nun zu integrieren, z. B. unter den Anfangsbedingungen

$$u=0, \quad v=0, \quad \omega=kc \quad \ldots \quad (10.4),$$

so folgt aus der zweiten Gl. (10.1) und aus (10.3), daß $\dot{\omega}$ und $\ddot{\omega}$ die Anfangsbedingungen haben müssen

$$\dot{\omega}=0, \quad \ddot{\omega}=0 \quad \ldots \ldots \quad (10.5).$$

Nach dem § 4 aber erhält man dieselben Anfangsbedingungen, wenn man in (4.6) und (4.3) den Parameter $\psi=0$ setzt, und es ist dann wohl auch noch $\dot{\omega}=0$, aber man hat nach (4.5) und (5.3)

$$\ddot{\omega}=-k c^2 \cos 2\psi \cdot \dot{\psi}=-k c^3 \cos 2\psi \cos \psi,$$

so daß man für $t=0$ nicht $\ddot{\omega}=0$, sondern $\ddot{\omega}=-k c^3$ zu setzen hat. Die Bahnen können deshalb nicht ineinandergehen, wenn ε gegen Null konvergiert.

11. Dagegen kann man die von uns untersuchte nichtholonome Bewegung realisieren, wenn man eine statische Reibung voraussetzt, wie man sie gewöhnlich in der Statik der festen Körper annimmt. Wir setzen demnach voraus, daß $v=0$ ist, solange

$$R < N \quad \ldots \ldots \quad (11.1)$$

ist, wobei die Konstante N von der Art der Belastung des Schlittens abhängt. Nach (4.9) ist diese Bedingung auf der ganzen Bahn erfüllt, wenn

$$c^2 < \frac{2N}{M a k (k^2-1)} \quad \ldots \ldots \quad (11.2),$$

oder auch, wegen (4.10), wenn die kinetische Energie

$$T < \frac{a N k^3}{(k^2-1)} \quad \ldots \ldots \quad (11.3)$$

ist.

Gibt man dem Schlitten einen zu starken Impuls, so wird er aus seiner Bahn geworfen, was fast selbstverständlich ist. Es ist auch recht plausibel, daß die gefährliche Stelle, wie unsere Formeln zeigen, sich in der Nähe des Punktes befindet, für welchen der Parameter $\psi=\pi/4$ ist. An dieser Stelle hat allerdings der Krümmungsradius ϱ nur den Wert $a k$, aber die lineare Geschwindigkeit u ist schon beträchtlich, sie ist gleich $\frac{a k^2 c^2}{\sqrt{2}}$. M 2

Ein Grenzproblem in der Spieltheorie.

Von *Harald Cramér* in Djursholm.

1. Es sei irgendein Glücksspiel vorgelegt, wo der Gewinn eines Spielers A in jeder Partie eine endliche Anzahl verschiedener Werte annehmen kann[1]), und es werde eine unbegrenzte Reihe von Partien unter den gleichen Bedingungen gespielt. Wir stellen uns vor, daß jede Partie eine bestimmte Zeit τ in Anspruch nimmt, und können dann den Verlauf des Spieles in wohlbekannter Weise geometrisch darstellen, indem wir durch die Punkte $\tau, 2\tau, \ldots$ einer horizontalen Zeitachse vertikale Geraden ziehen und auf der Vertikalen durch $n\tau$ den Wert des Totalgewinnes von A nach n Partien absetzen. Der Verlauf des Spieles wird demnach durch einen gebrochenen Linienzug dargestellt, der im Nullpunkt anfängt und von Vertikalen zu Vertikalen nach rechts geht.

Auf der n-ten Vertikalen gibt es eine endliche Anzahl von Punkten P, die den möglichen Werten des Gewinnes nach n Partien entsprechen. Zu jedem P gehört eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, daß der obengenannte Linienzug eben durch diesen Punkt geht. Die Summe der Wahrscheinlichkeitswerte, die den verschiedenen P zugeordnet sind, ist natürlich gleich Eins. Man kann sich die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten so vorstellen, daß eine „Wahrscheinlichkeitsmasse" vom Betrage 1 zunächst in den Nullpunkt verlegt ist und sich dann von Vertikalen zu Vertikalen nach rechts fortpflanzt, unter gleichzeitiger Aufteilung auf die verschiedenen möglichen Punkte jeder Vertikalen.

Die klassische Theorie der Glücksspiele beschäftigt sich nun erstens mit Fragen über die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten auf der n-ten Vertikalen, die für $n \to \infty$ bekanntlich gegen die normale oder Gaußsche Verteilung strebt. Den Typus für diese Klasse von Fragen bildet das berühmte Bernoullische Problem, das ja mit einem Glücksspiel von besonders einfacher Struktur verbunden ist.

[1]) Verlust wird hier immer als negativer Gewinn angesehen.

Ferner findet man in der Literatur verschiedene Varianten des sog. Problems vom Ruin des Spielers. Wenn z. B. der Spieler A ein endliches Vermögen a besitzt, das Vermögen seines Gegenspielers aber als unendlich angenommen wird, so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, daß A früher oder später durch das Spiel ruiniert wird. Der Ruin von A wird offenbar eintreten, sobald der gebrochene Linienzug, der den Spielverlauf darstellt, eine Parallele zur Zeitachse im Abstand $-a$ trifft. Die grundlegenden Resultate über Probleme dieser Art verdanken wir de Moivre, Lagrange und Laplace.

2. Wir können nun das oben betrachtete Spiel dadurch zu einem kontinuierlichen Vorgang machen, daß wir die Zeit τ für jede einzelne Partie gegen Null konvergieren lassen, eventuell unter gleichzeitiger Abänderung der Spielbedingungen. In der Grenze wird dann jedes unendlich kleine Zeitelement einer Partie entsprechen, wobei die verschiedenen Partien immer als voneinander unabhängig angenommen werden. Der Spielverlauf wird durch eine Kurve dargestellt, wo jede beliebige Ordinate den Wert des Totalgewinnes in dem betreffenden Zeitpunkt angibt. Bei der Bewegung der Wahrscheinlichkeitsmasse nach rechts erhält jede Vertikale durch einen Zeitpunkt t eine Belegung von der Gesamtmasse 1, welche die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinnes nach der Zeit t darstellt. Unser Spiel geht also in einen kontinuierlichen stochastischen Prozeß nach der Terminologie von Kolmogoroff (Analytische Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Ann. 104 (1931), S. 415) über.

Um ein erstes Beispiel eines solchen Grenzüberganges zu erhalten, gehen wir von dem einfachen diskontinuierlichen Spiel aus, wo der Gewinn in jeder Partie nur die beiden möglichen Werte $+s$ und $-s$ hat, mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p bzw. $q=1-p$. Der Totalgewinn nach n Partien (= nach der Zeit $n\tau$) hat den Mittelwert $ns(p-q)$ und die Streuung $s\sqrt{npq}$, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Vertikalen $n\tau$, welche durch die bekannten Binomialglieder gegeben ist, strebt für $n\to\infty$ gegen die normale Verteilung. Die Wahrscheinlichkeit des Spielers A, ruiniert zu werden, wenn er anfänglich das Vermögen a hat, ist gleich 1 für $p\leqq\frac{1}{2}$, und gleich $\left(\frac{q}{p}\right)^{\varkappa}$ für $p>\frac{1}{2}$, wo $\varkappa$ die kleinste ganze Zahl bezeichnet, die $\geqq\frac{a}{s}$ ist.

Es seien jetzt λ, σ und t drei reelle Größen, von denen die beiden letzten positiv sind. Wir setzen

$$p=\frac{1}{2}+\frac{\lambda\sqrt{\tau}}{4\sigma},\qquad s=2\sigma\sqrt{\tau}$$

und lassen gleichzeitig τ gegen Null und n gegen Unendlich streben, in solcher Weise, daß $n\tau\to t$.

Die Belegung auf der Vertikalen $n\tau$ geht dann in eine normale Belegung auf der Vertikalen t über; für den Mittelwert und die Streuung haben wir

$$ns(p-q)\to\lambda t,\qquad s\sqrt{npq}\to\sigma\sqrt{t}.$$

Wir erhalten in dieser Weise ein kontinuierliches Spiel von derjenigen Art, die von Bachelier[2]) behandelt worden ist. Die Bewegung der Wahrscheinlichkeitsmasse ist eine durchaus stetige, und die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten für eine beliebige Zeit t folgt genau dem Gesetz von Gauß. Bezeichnen wir durch $\psi(a)$ die Wahrscheinlichkeit des Spielers A mit dem Vermögen a, bei dem kontinuierlichen Spiele ruiniert zu werden, so ist offenbar $\psi(a)=1$ für $\lambda\leqq 0$; für $\lambda>0$ haben wir

$$\psi(a)=\lim_{\tau\to 0}\left(\frac{q}{p}\right)^{\varkappa}=e^{-\frac{\lambda a}{2\sigma^2}}.$$

3. In dem obigen Beispiel werden sowohl der Gewinn wie der Verlust, die der Spieler in einem unendlich kleinen Zeitelement erhalten kann, auch unendlich klein, und der Verlauf des Spieles wird durch eine stetige Kurve dargestellt. Ein kontinuierliches Spiel von wesentlich anderer Art wurde in gewissen Arbeiten über die Theorie des Risikos einer Versicherungsanstalt[3]) behandelt. Unser Spieler A ist hier eine Versicherungsanstalt. In jedem unendlich kleinen Zeitelement erhält die Anstalt von den Versicherungsnehmern unendlich kleine Be-

[2]) Bachelier, Calcul des probabilités, Paris 1912.

[3]) Vgl. z. B. F. Lundberg: Über die Theorie der Rückversicherung, VI. Internationaler Kongreß für Versicherungswissenschaft, Wien 1909, und Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse, Skand. Aktuarietidskrift 1930. Ferner I. Laurin: An Introduction into Lundberg's Theory of Risk, ibid. 1930, und H. Cramér: On the mathematical Theory of Risk, Stockholm 1930 (in der Festschrift der Versicherungsgesellschaft Skandia).

träge von Risikoprämien, mit gewissen prozentuellen Sicherheitszuschlägen versehen. Andererseits gibt es eine unendlich kleine Wahrscheinlichkeit, daß die Anstalt während desselben Zeitelementes eine Risikosumme endlicher Größe auszahlen muß. Die Größe des Sicherheitszuschlages und die Verteilung der Risikosummen im Bestande nach Größe werden als bekannt angenommen, und es wird gefragt nach der Wahrscheinlichkeitsverteilung für den Gewinn der Anstalt nach einer beliebigen Zeit t, sowie nach der Wahrscheinlichkeit, daß die Anstalt früher oder später ruiniert wird, wenn für $t=0$ ein Sicherheitsfonds von der Größe a vorhanden ist. In den obengenannten Arbeiten werden diese Fragen durch direkte Untersuchung der Differential- und Integrodifferentialgleichungen des kontinuierlichen Spieles behandelt. Im folgenden werden wir nun den speziellen Fall betrachten, wo alle Risikosummen im Bestande gleich sind, und werden zeigen, daß sich dieser Fall auch durch einen Grenzübergang der oben betrachteten Art erhalten läßt.

Wir gehen von einem diskontinuierlichen Spiel aus, wo der Spieler A vor jeder Partie den Betrag $(1+\lambda)\,q$ als Einsatz erhält $(\lambda>0)$. Als Resultat der Partie hat er entweder keine Auszahlung oder eine Auszahlung vom Betrage Eins zu machen; die Wahrscheinlichkeiten dieser zwei Fälle seien p bzw. $q=1-p$. Wir können dann q als die „Nettorisikoprämie" der Partie betrachten; außer dieser Prämie erhält der Spieler einen „Sicherheitszuschlag" von der Größe $\lambda\,q$. Wenn jede Partie die Zeit τ erfordert, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß nach der Zeit $n\,\tau$ genau ν Auszahlungen stattgefunden haben $(\nu=0,1,\ldots\ldots n)$, gleich $\binom{n}{\nu}q^{\nu}\,p^{n-\nu}$, und der Totalgewinn hat dann den Wert $(1+\lambda)\,n\,q-\nu$.

Setzen wir nun $q=\tau$ und lassen τ gegen Null abnehmen, so bekommen wir in der Grenze ein kontinuierliches Spiel, wo unser Spieler für jedes Zeitelement $d\,t$ die sicherheitsbelastete Risikoprämie $(1+\lambda)\,d\,t$ bekommt, während er die Wahrscheinlichkeit $d\,t$ hat[4]), die Risikosumme 1 auszahlen zu müssen. Wie in dem vorigen Beispiel lassen wir gleichzeitig n ins Unendliche wachsen, in solcher Weise, daß $n\,\tau\to t$. Die obigen Formeln zeigen dann, daß in dem kontinuierlichen Spiel der Totalgewinn nach der Zeit t jeden Wert $(1+\lambda)\,t-\nu$ mit $\nu=0,1,2,\ldots\ldots$ annehmen kann, mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $\frac{t^{\nu}}{\nu!}e^{-t}$. Die Belegung auf einer beliebigen Vertikallinie ist damit eindeutig festgelegt. Der Mittelwert der Belegung ist $\lambda\,t$ und die Streuung $\sqrt{t}$.

In bezug auf das Ruinproblem werden wir nur zeigen, daß man bei dem hier behandelten Grenzübergang durch formale Rechnung auf genau dieselben Formeln geführt wird, die in den oben zitierten Arbeiten[5]) mit den ziemlich komplizierten direkten Methoden abgeleitet werden.

Wir setzen $q=\tau=\frac{1}{(1+\lambda)\,N}$ und werden N durch ganze Zahlen ins Unendliche gehen lassen. Zuerst betrachten wir aber das Spiel für einen endlichen Wert von N.

Es sei $\psi_N(a)$ die Wahrscheinlichkeit für A, ruiniert zu werden, wenn sein Vermögen gleich a ist. Da das Vermögen von A sich während des Spieles nur um Multipeln von $\frac{1}{N}$ ändert, ist $\psi_N(a)$ offenbar für $\frac{\nu-1}{N}<a\leqq\frac{\nu}{N}$ konstant. Wir setzen

$$p_{\nu}=\psi_N\left(\frac{\nu}{N}\right)$$

und finden dann leicht die Differenzengleichung

$$p_{\nu}=p\,p_{\nu+1}+q\,p_{\nu-N+1}\,. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Die charakteristische Gleichung hiervon lautet (mit $\frac{1}{x}$ anstatt des üblichen x als Veränderliche):

$$x=p+q\,x^{N}$$

und kann nach Einsetzung des Wertes von q und Wegdividierung der Wurzel $x=1$, was in unserem Falle gestattet ist, auch in der Form

$$\frac{x^{N}-1}{x-1}=(1+\lambda)\,N \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

[4]) Der Fall, wo diese Wahrscheinlichkeit gleich $c\,d\,t$ mit beliebigem konstanten c ist, läßt sich natürlich in der gleichen Weise behandeln. Man sieht übrigens leicht ein, daß es überhaupt unnötig ist, die Zeit als unabhängige Veränderliche einzuführen. Man kann hierzu ebensogut die Risikoprämie wählen, was für die versicherungsmathematischen Anwendungen sogar vorteilhafter ist.

[5]) Vgl. etwa Cramér, l. c., S. 73—82.

geschrieben werden. Die absolut kleinste Wurzel x_0 der Gl. (2) ist reell und größer als 1, und für große N hat man

$$x_0 \sim 1 + \frac{R}{N}$$

mit von N unabhängigem $R > 0$. Durch Einsetzung in (2) findet man für R die Gleichung

$$e^R - 1 = (1 + \lambda) R \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

welche eine und nur eine positive Wurzel R hat.

Für große ν ist nun $p_\nu \sim k x_0^{-\nu}$ mit konstantem k. Setzen wir hier $\nu = N a$, $x_0 \sim 1 + \frac{R}{N}$, und lassen N ins Unendliche wachsen, so erhalten wir (formal) für die Wahrscheinlichkeit $\psi(a)$ des Ruins bei dem kontinuierlichen Spiele

$$\psi(a) = \lim_{N \to \infty} \psi_N(a) \sim k e^{-Ra} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

Wir können auch ein genaueres Resultat erhalten, indem wir aus der Differenzengleichung (1) nach dem Vorgang von Laplace eine erzeugende Funktion der p_ν bilden. Wir erhalten dann

$$f_N(x) = \sum_0^\infty p_\nu x^\nu = 1 - \frac{x}{N(1+\lambda)(x-1)} \cdot \frac{x^N - 1 - N(x-1)}{q x^N - x + p},$$

und nach Einsetzung des Wertes von q

$$f_N(x) = 1 - \frac{x}{(1+\lambda)(x-1)} \left(1 + \lambda \frac{x^N - 1}{x^N - 1 - N(1+\lambda)(x-1)}\right) \quad . \; . \quad (5).$$

Der Konvergenzradius der Reihe $\Sigma p_\nu x^\nu$ ist gleich x_0 und ist also größer als 1. Wenn nun $x = e^{\frac{s}{N}}$ substituiert wird, so gibt es also ein $c > 0$, so daß die Reihe

$$f_N\left(e^{\frac{s}{N}}\right) = \sum p_\nu e^{\frac{\nu s}{N}}$$

für $s = c$ konvergiert. Für alle hinreichend großen N kann man übrigens, wie sich durch Untersuchung der Gl. (2) leicht ergibt, $c = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ wählen. Wenn dann $a = \frac{\nu}{N}$ mit ganzzahligem ν ist, so gilt

$$\int_a^\infty \psi_N(t)\, dt = \frac{1}{N}(p_{\nu+1} + p_{\nu+2} + \ldots\ldots) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-us}}{s} \cdot \frac{f_N\left(e^{\frac{s}{N}}\right)}{N}\, ds \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

wo u eine beliebige Zahl im Intervalle $a < u < a + \frac{1}{N}$ ist. Für unendlich wachsendes N ergibt sich aber aus (5)

$$\frac{1}{N} f_N\left(e^{\frac{s}{N}}\right) \to -\frac{1}{(1+\lambda)s} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)s} \cdot \frac{e^s - 1}{e^s - 1 - (1+\lambda)s} \quad \ldots \ldots \quad (7).$$

Durch formale Ausführung des Grenzüberganges in (6) erhalten wir also, da das erste Glied rechts in (7) ein verschwindendes Integral gibt,

$$\int_a^\infty \psi(t)\, dt = -\frac{\lambda}{1+\lambda} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{-as}}{s^2} \cdot \frac{e^s - 1}{e^s - 1 - (1+\lambda)s}\, ds.$$

Das ist aber genau dieselbe Formel, die in den oben zitierten Arbeiten über die Theorie des Risikos bewiesen wird (vgl. etwa Cramér, l. c., S. 81 bis 82). Der Integrand auf der rechten Seite hat einen einfachen Pol im Punkte $s = R$, wo R durch die Gl. (3) bestimmt ist. Mit Hilfe der Cauchyschen Integralformel kann hieraus die folgende Verschärfung der asymptotischen Abschätzung (4):

$$\psi(a) \sim \frac{\lambda}{(1+\lambda)R - \lambda} e^{-Ra}$$

für große Werte des Anfangsvermögens a abgeleitet werden.

Gestaltliches über die Partialsummen und ihre Mittelwerte bei der Fourierreihe und der Potenzreihe.

Von *Leopold Fejér* in Budapest.

Einleitung.

1. Die Eigenschaften der Partialsummen und der arithmetischen Mittel verschiedener Ordnung der Fourierschen Reihe einer Funktion einer reellen Veränderlichen, oder der Potenzreihe einer Funktion einer komplexen Variabel wurden in den letzten Jahrzehnten wiederholt mit Erfolg studiert. Das Interesse der Forscher ist nicht auf die Konvergenzfragen beschränkt, die sich auf die unendliche Folge der Partialsummen oder ihrer Mittelwerte beziehen, sondern erstreckt sich auch auf den Verlauf der einzelnen approximierenden Gebilde, verglichen mit dem der Funktion. Da Resultate dieser Art auch für die Anwendungen der Mathematik ein gewisses Interesse haben können, möchte ich an dieser Stelle einige neue Sätze mit Beweisskizze angeben, die alle in der angedeuteten Richtung liegen. Etwas näher kann ich den Inhalt dieser Theoreme vielleicht dadurch charakterisieren, daß ich eins von ihnen gleich hier angebe:

Die arithmetischen Mittel dritter Ordnung der Fourierschen Sinusreihe einer beliebigen, im Intervalle $0 < x < \pi$ positiven und (von oben gesehen) konvexen (nichtkonkaven) Funktion $f(x)$ sind konvex im selben Intervalle.

Für die gewöhnlichen Partialsummen, arithmetischen Mittel erster und zweiter Ordnung der Fourierschen Sinusreihe aber ist dieser Satz nicht richtig[1]).

In den §§ 2 und 3 findet man genau formulierte Sätze, die alle zeigen, daß, in bestimmten Fällen, die „ausgleichende Wirkung" des Prozesses der Mittelbildung, wenn man ihn auf die Partialsummen der Fourierschen Sinusreihe oder Kosinusreihe anwendet, bei Wiederholung des Prozesses immer größer wird. Im § 4 wird die ausgleichende Wirkung der Mittelbildung wieder nach einer anderen Richtung untersucht. Es werden da durch den Prozeß, in bestimmten Fällen, approximierende Polynome erzeugt, die im ganzen Konvergenzkreise der Potenzreihe „schlicht" sind, wenn die Potenzreihe es ist.

Als wichtigste Grundlage für die meisten Beweise dient die neue Erkenntnis, daß für die „Kernreihe"

$$\sin t \sin x + \sin 2t \sin 2x + \ldots + \sin nt \sin nx + \ldots \qquad \text{I}$$

der Fourierschen Sinusreihe erst die arithmetischen Mittel dritter Ordnung sämtlich positiv ausfallen, für ein beliebiges Wertepaar $0 < t < \pi$, $0 < x < \pi$. Dies folgt aus dem ebenfalls neuen Satze, daß erst die arithmetischen Mittel dritter Ordnung der Reihe

$$\sin \Theta + 2 \sin 2\Theta + \ldots + n \sin n\Theta + \ldots \qquad \text{II}$$

sämtlich positiv ausfallen im Intervalle $0 < \Theta < \pi$. Die Methode, mit welcher ich von II auf I schließe, ist dieselbe, mit welcher ich neulich einen schönen Satz von Herrn L. Koschmieder bewiesen habe. (Umgekehrt ist II ein Grenzfall von I).

Schließlich weise ich auf die bekannte Tatsache hin, daß für die Kernreihe

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx) \qquad \text{III}$$

der Fourierschen Reihe für das Intervall $(0, 2\pi)$ schon die arithmetischen Mittel erster Ordnung sämtlich nichtnegativ ausfallen, für jedes reelle Wertepaar t, x. Bei den Sinusreihen sind es also die Mittel dritter Ordnung, die den Mitteln erster Ordnung der gewöhnlichen Fourierschen Reihe entsprechen. —

Auf Anwendungen in der Potentialtheorie und Wärmeleitungstheorie möchte ich später zurückkommen.

[1]) Mit der Unterklasse von positiven konvexen Funktionen $f(x)$, für welche noch weiter die Symmetrieeigenschaft $f(\pi - x) = f(x)$ besteht, möchte ich mich an anderer Stelle gesondert beschäftigen.

§ 1. Definition der Cesàromittel.

2. Bevor ich die soeben angekündigten Sätze formulieren möchte, will ich daran erinnern, was man unter Cesàroschen Mittelwerten verschiedener Ordnung einer beliebigen unendlichen Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (1)$$

versteht. Zunächst sollen die „iterierten Partialsummen" oder, kürzer, „Partialsummen" (verschiedener Ordnung) definiert werden. Die gewöhnliche Partialsumme vom Index n der Reihe (1) wird, wie üblich, durch

$$s_n^{(0)} = s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \qquad (2)$$

definiert; die Partialsumme erster Ordnung vom Index n durch

$$s_n^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(0)} \qquad (3);$$

die Partialsumme zweiter Ordnung vom Index n durch

$$s_n^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(1)} \qquad (4);$$

usw., die Partialsumme k-ter Ordnung vom Index n rekursiv durch

$$s_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu^{(k-1)} \qquad (5).$$

Es sei nun $e_n^{(k)}$ die Partialsumme k-ter Ordnung vom Index n der unendlichen Reihe

$$1 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots \qquad (6).$$

(Es ist übrigens $e_n^{(k)} = \binom{n+k}{k}$). Dann heißt der Quotient

$$S_n^{(k)} = \frac{s_n^{(k)}}{e_n^{(k)}} = \frac{s_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}} \qquad (7),$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \quad k = 0, 1, 2, \ldots),$$

der „Cesàrosche Mittelwert" k-ter Ordnung vom Index n der unendlichen Reihe (1). Da im folgenden besonders die Cesàromittel von der Ordnung 0, 1, 2, 3 auftreten werden, möchte ich diese hier explizite anschreiben:

$$S_n^{(0)} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n, \quad S_n^{(1)} = \frac{s_0^{(0)} + s_1^{(0)} + \ldots + s_n^{(0)}}{n+1} = \frac{(n+1)\,u_0 + n\,u_1 + \ldots + 1 \cdot u_n}{n+1},$$

$$S_n^{(2)} = \frac{(n+1)(n+2)\,u_0 + n\,(n+1)\,u_1 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot u_n}{(n+1)(n+2)},$$

$$S_n^{(3)} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\,u_0 + n\,(n+1)(n+2)\,u_1 + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot u_n}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Schließlich will ich noch erwähnen, daß, wenn

$$F(r) = u_0 + u_1\,r + u_2\,r^2 + \ldots + u_n\,r^n + \ldots \qquad (8)$$

die erzeugende Funktion der unendlichen Reihe (1) ist, so ist die erzeugende Funktion der Partialsummen k-ter Ordnung $s_n^{(k)}$ dieser Reihe die Funktion $\frac{1}{(1-r)^{k+1}} F(r)$, d. h. es ist[2])

$$\frac{F(r)}{(1-r)^{k+1}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu^{(k)}\, r^\nu \qquad (9).$$

[2]) Die Sätze dieser Note sind für die Cesàromittel formuliert und für sie bewiesen. Sie gelten aber fast ausnahmslos für die sog. Hölderschen Mittelwerte. Eben deswegen spreche ich fast immer von den „arithmetischen Mittelwerten", oder kurz „Mittelwerten" einer Reihe und gebrauche den Ausdruck „Cesàromittel" nur dann, wenn ich die betreffende Behauptung bisher nur für diese Mittelwerte beweisen konnte. I. B. auf den Übergang zu den Hölderschen Mittelwerten von den Cesàroschen verweise ich auf die Arbeit von Herrn J. Schur: Über die Äquivalenz der Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte, Math. Annalen Bd. LXXIV (1913), S. 447 bis 458.

§ 2. Sätze über die arithmetischen Mittel der Fourierschen Sinusreihe. Zwei Beispiele. Andeutung für den Beweis der allgemeinen Sätze.

3. Satz I. Die arithmetischen Mittel[3]) dritter Ordnung $S_n^{(3)}(x)$ der Fourierschen Sinusreihe

$$b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx + \ldots \quad (10), \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t) \sin nt\, dt, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (11),$$

einer im Intervalle $0 < x < \pi$ nichtnegativen (aber nicht identisch verschwindenden) Funktion $f(x)$ sind sämtlich positiv im selben Intervalle[4]).

Dieser Satz ist für die arithmetischen Mittel 0-ter, 1-ter und 2-ter Ordnung der Reihe (10) nicht gültig[5]).

Übrigens ist andererseits $S_n^{(3)}(x) \leq M$ für $0 < x < \pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, wo M die obere Grenze von $f(x)$ für das Intervall $0 < x < \pi$ bezeichnet. Diese Behauptung ist aber auch für $S_n^{(1)}(x)$ und $S_n^{(2)}(x)$ richtig.

Satz II. Die arithmetischen Mittel der Fourierschen Sinusreihe (10) einer im Intervalle $0 < x < \pi$ positiven und, von oben gesehen, konvexen (nichtkonkaven) Funktion haben die folgenden Eigenschaften:

1°. Die Mittel 0-ter Ordnung $S_n^{(0)}(x)$, d. h. die gewöhnlichen Partialsummen der Sinusreihe (10), sind im Intervalle $0 < x < \pi$ durchweg positiv (Satz von L. Koschmieder[6])).

2°. Die Mittel 1-ter Ordnung $y = S_n^{(1)}(x)$ liegen überdies für $0 < x < \pi$ unterhalb[7]) der Kurve $y = f(x)$, d. h. es ist

$$0 < S_n^{(1)}(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} \leq f(x), \quad 0 < x < \pi; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (12).$$

3°. Über die Mittel 2-ter Ordnung $S_n^{(2)}(x)$ kann ich nicht mehr aussagen als über die Mittel 1-ter Ordnung, d. h. daß auch für sie

$$0 < S_n^{(2)}(x) \leq f(x), \quad 0 < x < \pi; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (13),$$

gültig ist.

4°. Für die Mittel 3-ter Ordnung $S_n^{(3)}(x)$ ist wieder

$$0 < S_n^{(3)}(x) \leq f(x), \quad 0 < x < \pi; \quad n = 0, 1, 2, \ldots \quad (14),$$

gültig; außerdem sind aber die Mittelkurven $y = S_n^{(3)}(x)$ konvex (von oben gesehen), so wie es die Kurve $y = f(x)$ ist[8]). Die Mittel $S_n^{(0)}(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ aber haben diese Konvexitätseigenschaft im allgemeinen nicht[9]).

4. Ich kann vielleicht hier zwei Beispiele besprechen; gleichzeitig werde ich die allgemeinen Sätze erläutern und den Weg für ihre Beweisführung andeuten.

---

[3]) Bei der Bildung der arithmetischen Mittelwerte denken wir uns die Sinusreihe (10) immer als vollständige Fourierreihe

$$0 + (0 \cdot \cos x + b_1 \sin x) + \ldots + (0 \cdot \cos nx + b_n \sin nx) + \ldots$$

geschrieben, so daß

$$S_n^{(3)}(x) = \frac{n(n+1)(n+2)\, b_1 \sin x + \ldots + 1 \cdot 2 \cdot 3\, b_n \sin nx}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

[4]) Natürlich $S_0^{(3)}(x) \equiv 0$ ausgenommen.

[5]) Beweis auf Grund der Positivität der $S_n^{(3)}(x)$ der Reihe (36) in der Nr. 8 vorliegender Arbeit. — Ich bemerke hier, daß die Ungleichung $0 < S_n^{(3)}(x) < M$ sich in interessanter Weise verschärfen läßt mit Hilfe der $S_n^{(3)}(x)$ der Sinusreihe $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin(2\nu-1)x}{2\nu-1}$. Die $S_n^{(0)}(x)$ und $S_n^{(1)}(x)$ dieser Reihe hat besonders Herr H. S. Carslaw genauer untersucht; s. sein Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, third Edition, London (1930), für die $S_n^{(1)}(x)$ insbesondere die interessante Figur 37 auf S. 309.

[6]) L. Koschmieder: Vorzeichenseigenschaften der Abschnitte einiger physikalisch bedeutsamer Reihen. Monatshefte für Math. u. Phys., Bd. XXXIX (1932), S. 321 bis 344. Es ist dies der erste allgemeine Satz von diesem Typus, der für die Fouriersche Sinusreihe einer in $0 < x < \pi$ positiven und konvexen Funktion aufgestellt wurde.

[7]) Während also — wie bekannt — die die gewöhnlichen Partialsummen $y = S_n^{(0)}(x)$ repräsentierenden Kurven, mit wachsendem n, sich immer mehr und mehr um die Kurve $y = f(x)$ herumschlängeln, liegen schon die Mittelkurven erster Ordnung $y = S_n^{(1)}(x)$ unterhalb der Kurve $y = f(x)$.

[8]) Es ist bemerkenswert, daß, durch dreimalige Ausgleichung durch arithmetische Mittelbildung aus den Partialsummen $s_0(x), s_1(x), \ldots$ der Fourierschen Sinusreihe konvexe Mittelkurven entstehen, wenn die dargestellte Kurve positiv und (von oben) konvex ist im Intervalle $0 < x < \pi$.

[9]) S. das Beispiel der schiefen geraden Linie in Nr. 4 bis 6.

Erstes Beispiel. Als erstes Beispiel nehme ich den g e r a d e n L i n i e n z u g, der die Punkte $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und $(\pi, 0)$ verbindet. Dieser ist für $0 < x < \pi$ positiv und (von oben gesehen) nichtkonkav. Da jetzt $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ ist, so gilt für $0 < x \leq \pi$

$$f(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n} + \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Die g e w ö h n l i c h e n P a r t i a l s u m m e n

$$S_n^{(0)}(x) = s_n(x) = \frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 2x}{2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots; \quad s_0(x) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (16),$$

dieser F o u r i e r schen Sinusreihe sind schon vor langer Zeit gründlich untersucht worden, weil sie bei der Erörterung der sog. G i b b s schen Erscheinung entscheidende Bedeutung haben. Ich habe im Jahre 1910 die Vermutung ausgesprochen, daß die trigonometrischen Summen (16) im Intervalle $0 < x < \pi$ positiv sind. Herr D. J a c k s o n[10]) und T. H. G r o n w a l l[11]) haben diese Vermutung auch alsbald bewiesen. Neuerdings hat nun Herr L. K o s c h m i e d e r gezeigt, daß, ganz allgemein, die Partialsummen der F o u r i e r schen Sinusreihe einer im Intervalle $0 < x < \pi$ positiven und (von oben gesehen) nichtkonkaven Funktion $f(x)$ positiv sind im Intervalle $0 < x < \pi$. Die Grundlage seines Beweises für dieses Theorem ist eben die Positivität der Summen (16).

5. Ich habe schon im Jahre 1912 bemerkt, daß die Mittelkurven $y = S_n^{(1)}(x)$ der Reihe (15) ganz unterhalb der geraden Linie $y = \frac{\pi - x}{2}$ liegen für $0 < x < \pi$; gilt doch in diesem Falle die Formel[12]):

$$\frac{\pi - x}{2} - S_n^{(1)}(x) = \frac{\pi - x}{2} - \frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} = \frac{1}{n+1} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin (n+1) t}{\sin t}\right)^2 dt \quad \ldots \quad (17).$$

Es ist also hier tatsächlich

$$\frac{s_0(x) + s_1(x) + \ldots + s_n(x)}{n+1} < \frac{\pi - x}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (18)$$

für $0 < x < \pi$. Ich habe aber seinerzeit dieser speziellen Erscheinung keine besondere Bedeutung beigemessen. Heute kann ich auf Grund meiner Ungleichung (18) zeigen, daß, ganz allgemein, die gewöhnlichen arithmetischen Mittel erster Ordnung $S_n^{(1)}(x)$ der F o u r i e r schen Sinusreihe einer im Intervalle $0 < x < \pi$ positiven und (von oben gesehen) nichtkonkaven Funktion sämtlich unterhalb der entwickelten Kurve liegen, im Intervalle $0 < x < \pi$.

6. Aus den leicht erhältlichen asymptotischen Formeln

$$\frac{d^2}{dx^2} S_n^{(0)}(x) = n \left\{ \frac{\cos (2n+1) \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} + \varepsilon_n(x) \right\} \text{(A)}, \qquad \frac{d^2}{dx^2} S_n^{(1)}(x) = \frac{\sin (n+1) x + \delta_n(x)}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} \quad \ldots \text{(B)},$$

[10]) D u n h a m J a c k s o n: Über eine trigonometrische Summe, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII (1911).

[11]) T. H. G r o n w a l l: Über die G i b b s sche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \ldots + \frac{1}{n} \sin nx$. Math. Annalen, Bd. 72 (1912), S. 228 bis 243. — Einen d r i t t e n Beweis findet man in meiner Arbeit: Einige Sätze, die sich auf das Vorzeichen einer ganzen rationalen Funktion beziehen usw., Monatshefte für Math., Bd. XXXV (1928), S. 305 bis 344; s. insbesondere Satz XXVI, S. 339. Einen v i e r t e n Beweis, der wohl der kürzeste und einfachste ist, verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn E. L a n d a u (16. 2. 1931).

[12]) L. F e j é r: Über die Bestimmung des Sprunges der Funktion aus ihrer F o u r i e r reihe, Journal für die reine und angewandte Math., Bd. 142 (1912), S. 165 bis 188. Die Formel (17) des Textes ergibt sich aus der Formel (4) der zitierten Arbeit unmittelbar, wenn man die Gleichung

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt$$

berücksichtigt, die man erhält, wenn man in die Formel (4) $x = \pi$ setzt.

$$\frac{d^2}{d\,x^2} S_n^{(2)}(x) = \frac{1}{4\,n\sin^3\frac{x}{2}} \left\{ 2\cos\frac{x}{2} + \cos(2\,n+3)\frac{x}{2} + \eta_n(x) \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (C),$$

(wo $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = \lim\limits_{n=\infty} \delta_n = \lim\limits_{n=\infty} \eta_n = 0$, und zwar gleichmäßig in jedem Teilintervall von $0 < x < \pi$) ersieht man, daß die Mittelkurven $S_n^{(0)}(x) = s_n(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ der Reihe (15) im Intervalle $0 < x < \pi$ Inflexionspunkte haben, deren Anzahl mit n über alle Grenzen wächst. Für $S_n^{(0)}(x)$ und $S_n^{(1)}(x)$ gilt folgendes: in jedem Teilintervalle des ganzen Intervalles $0 < x < \pi$ liegt ein Inflexionspunkt, wenn nur n genügend groß ist. Für die Mittelkurve $y = S_n^{(2)}(x)$ gilt: sie ist in jedem Teilintervalle des Intervalls $0 < x < \frac{2}{3}\pi$ konvex (von oben gesehen), wenn nur n genügend groß ist, hingegen hat sie in jedem Teilintervalle des Intervalls $\frac{2}{3}\pi < x < \pi$ einen Inflexionspunkt, wenn nur n genügend groß ist.

Am meisten interessieren uns die arithmetischen Mittel dritter Ordnung $S_n^{(3)}(x)$ der Reihe (15). Für diese gilt im Intervalle $0 < x < \pi$, außer $0 < S_n^{(3)}(x) < \frac{\pi - x}{2}$, auch noch $\frac{d^2 S_n^{(3)}(x)}{d\,x^2} < 0$, d. h. daß sie im ganzen Entwicklungsintervalle $(0, \pi)$ von oben gesehen konvex sind. Um dies zu beweisen, muß, mit Rücksicht auf (15), gezeigt werden, daß die $S_n^{(3)}(x)$ der Reihe

$$0 \cdot \sin 0 \cdot x + 1 \cdot \sin 1 \cdot x + 2\sin 2\,x + \ldots + n\sin n\,x + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

sämtlich positiv sind im Intervalle $0 < x < \pi$. Das ist tatsächlich der Fall; den Beweis dafür gebe ich im Anhange dieser Note.

Daß die Reihe (19) durch die Methode der arithmetischen Mittel 2-ter Ordnung ausnahmslos summierbar ist und immer die „Summe" 0 liefert, ist schon lange bekannt (s. die interessanten Ausführungen in der Arbeit von Herrn Marcel Riesz: Über summierbare trigonometrische Reihen, Math. Annalen Bd. 71 (1911), insbesondere in der Fußnote auf den Seiten 72, 73 mit dem Hinweis auf Euler, Petrini, E. Holmgren und H. Burkhardt). Hingegen scheint neu zu sein, daß die Mittel dritter Ordnung derselben Reihe positiv sind für $0 < x < \pi$.

7. Zweites Beispiel. Das zweite Beispiel sei das folgende. Man verbinde gradlinig den Punkt $(0, 0)$ mit dem Punkte (a, b), und diesen mit dem Punkt $(\pi, 0)$. Jetzt ist[13])

$$f(x) = \frac{b}{a}\,x, \quad \text{für } 0 \leqq x \leqq a; \quad f(x) = b\,\frac{\pi - x}{\pi - a}, \quad \text{für } a \leqq x \leqq \pi; \quad (0 < a < \pi;\ b > 0) \quad . \quad . \quad (20),$$

und die Fouriersche Sinusreihe für $f(x)$ lautet:

$$f(x) = \frac{2\,b}{a\,(\pi - a)} \left\{ \frac{\sin a \sin x}{1^2} + \frac{\sin 2\,a \sin 2\,x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n\,a \sin n\,x}{n^2} + \ldots \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (21).$$

Nun ist auch im Falle dieser Dachfunktion $f(x)$

$$0 < S_n^{(0)}(x) \ldots (22), \quad 0 < S_n^{(1)}(x) < f(x) \ldots (23), \quad 0 < S_n^{(2)}(x) < f(x) \quad . \quad . \quad . \quad (24).$$

(22) rührt von Herrn Koschmieder her. (23) (und (24)) ist neu und kann mit wesentlicher Benutzung der Ungleichung (18) kurz in folgender Weise bewiesen werden. Indem ich von dem positiven konstanten Faktor $\frac{2\,b}{a\,(\pi - a)}$ absehe, habe ich jetzt die Reihe

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu\,a \sin \nu\,x}{\nu^2} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

zu betrachten. Jetzt ist

$$S_n^{(1)}(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{n+1-\nu}{n+1} \frac{\sin \nu\,a \sin \nu\,x}{\nu^2} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \frac{\sin \nu\,a \sin \nu\,x}{\nu^2} \quad . \quad . \quad . \quad (26).$$

[13]) Für $b = \frac{\pi}{2}$ und $a \to 0$ geht dieses Beispiel in das erste über.

so daß also, mit Rücksicht auf (25) und (26),

$$f(x) - S_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu a \sin \nu x}{\nu} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu a \sin \nu x}{\nu^2} \quad \dots \dots \dots (27).$$

Wenn ich statt a den Buchstaben y schreibe und dann die Differenz unter (27) mit $\Delta(x, y)$ bezeichne, so ist also

$$\Delta(x, y) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin \nu x \sin \nu y}{\nu} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu x \sin \nu y}{\nu^2} \quad \dots \dots \dots (28).$$

Beweisen muß ich, daß $\Delta(x, y)$ im Quadrat der xy-Ebene $0 < x < \pi$, $0 < y < \pi$, d. h. im Quadrat, dessen Ecken $A(0, 0)$, $B(\pi, 0)$, $C(\pi, \pi)$, $D(0, \pi)$ sind, positiv ist. Da $\Delta(y, x) = \Delta(x, y)$, so genügt es zu zeigen, daß $\Delta(x, y)$ im Innern des Dreiecks ABC, und auf der Diagonale AC (die beiden Eckpunkte A und C ausgenommen) positiv ist. Daß $\Delta(x, y)$ auf der Diagonale AC des rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecks ABC positiv ist, ist nach (28) klar, da doch auf der Diagonale $x = y$ ist, und also

$$\Delta(x, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sin^2 \nu x}{\nu} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2 \nu x}{\nu^2} \geqq \frac{\sin^2 x}{n+1} > 0 \quad \dots \dots \dots (29),$$

für $0 < x < \pi$. Ich habe also schließlich nur zu zeigen, daß $\Delta(x, y)$ im Innern des Dreiecks ABC positiv ist.

Die Behauptung, daß $\Delta(x, y)$ im Innern des Dreiecks ABC irgendwo Null oder negativ wird, führt in folgender Weise zu einem Widerspruche. Da $\Delta(x, 0) = 0$, $\Delta(\pi, y) = 0$ ist, so sehen wir, daß die auf der ganzen abgeschlossenen Dreiecksfläche stetige Funktion $\Delta(x, y)$ unter (28) auf der ganzen Peripherie des Dreiecks ABC nichtnegativ ist. Wäre also $\Delta(x, y)$ im Innern von ABC irgendwo 0 oder negativ, so müßte im Innern von ABC ein Punkt x, y existieren, wo $\Delta(x, y)$ ein Minimum hat, dessen Wert entweder Null oder negativ ist. In beiden Fällen ist, und darauf kommt es mir nur an, an dieser *inneren* Stelle x, y des Dreiecks ABC

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = 0 \quad \dots \dots \dots (30).$$

Das ist aber unmöglich. Aus (28) folgt nämlich

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu x \cos \nu y + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu x \cos \nu y}{\nu} \quad \dots \dots \dots (31),$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x \sin \nu y + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\cos \nu x \sin \nu y}{\nu} \quad \dots \dots \dots (32),$$

oder, indem ich statt $x - y = \zeta$ schreibe und die Gl. (17) berücksichtige,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial x} &= \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \sin \nu \zeta + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{\sin \nu \zeta}{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu \zeta}{\nu} - \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \frac{\sin \nu \zeta}{\nu} \\ &= \frac{\pi - \zeta}{2} - \sum_{\nu=1}^{n} \left(1 - \frac{\nu}{n+1}\right) \frac{\sin \nu \zeta}{\nu} = \frac{1}{n+1} \int_{\frac{\zeta}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin (n+1) t}{\sin t}\right)^2 dt \end{aligned}\right\} \quad . \ (34).$$

Da aber im Innern des Dreiecks ABC die Ungleichung $0 < x - y = \zeta < \pi$, also die Ungleichung $0 < \frac{\zeta}{2} < \frac{\pi}{2}$ gültig ist, so liefert (34) für die Minimumstelle x, y von $\Delta(x, y)$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y} - \frac{\partial \Delta}{\partial x} > 0 \quad \dots \dots \dots (35),$$

was mit (30) im Widerspruche steht.

8. Die arithmetischen Mittel dritter Ordnung $S_n^{(3)}(x)$ der Dachfunktion (20), über die ich schließlich noch ganz kurz sprechen möchte, sind sämtlich, von oben gesehen, konvex. Dies folgt aus dem Umstande, daß für die Reihe

$$\sin a \sin x + \sin 2a \sin 2x + \ldots + \sin na \sin nx + \ldots, \quad (0 < a < \pi) \quad . \quad . \quad (36)$$

(die aus der Fourierschen Sinusreihe (21) der Dachfunktion durch zweimalige gliedweise Differentiation nach x und durch Weglassung des negativen Faktors $-\dfrac{2b}{a(\pi - a)}$ entsteht) die arithmetischen Mittel dritter Ordnung $S_n^{(3)}(x)$ sämtlich positiv sind im Intervalle $0 < x < \pi$. Das folgt leicht aus dem Umstande, daß im selben Intervalle die $S_n^{(3)}(x)$ der Reihe (19) sämtlich positiv sind. Ich bemerke noch, daß für eine beliebige Dachfunktion die $S_n^{(0)}(x)$, $S_n^{(1)}(x)$, $S_n^{(2)}(x)$ nicht alle, von oben gesehen, konvex sind.

9. Wir haben im vorhergehenden kurz dargetan, wie man beweisen kann, daß im Intervalle $0 < x < \pi$ $S_n^{(1)}(x)$ unterhalb von $f(x)$ liegt, und daß $S_n^{(3)}(x)$, von oben gesehen, konvex ist, wenn $f(x)$ speziell eine Dachfunktion bedeutet. Wie beweist man dasselbe für eine beliebige, im Intervalle $0 < x < \pi$ positive und, von oben gesehen, konvexe Funktion $f(x)$? Dazu ist die von den Herren W. Blaschke, Ph. Frank und G. Pick entwickelte Methode wohl am geeignetsten[14]). Da nach diesen Autoren ein beliebiges, positives und von oben konvexes Polygon sich aus Dachfunktionen additiv zusammensetzen läßt, so erhalten wir unsere Sätze mit einem Schlage für ein beliebiges konvexes Polygon. Daraus weiter, durch trivialen Grenzübergang (bei festem n), dieselben Sätze für eine beliebige, von oben konvexe Kurve.

Eine zweite, sehr eng verwandte Methode, die ebenfalls zum Ziele führt, ist die „Methode der partiellen Integration".

§ 3. Ein Satz über die arithmetischen Mittel der Fourierschen Kosinusreihe.

10. Für die reine Kosinusreihe einer im Intervalle $0 \leq x \leq \pi$ gegebenen Funktion gelten anderslautende Sätze. Einer lautet folgenderweise.

Satz III. Die arithmetischen Mittel dritter Ordnung $S_n^{(3)}(x)$ der reinen Kosinusreihe

$$a_0 + a_1 \cos x + \ldots + a_n \cos nx + \ldots$$

einer beliebigen, im Intervalle $0 \leq x \leq \pi$ monotonen Funktion $f(x)$ sind sämtlich monoton im Intervalle $0 \leq x \leq \pi$, und zwar in demselben Sinne wie die Funktion[15]) $f(x)$.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf der Tatsache, daß die $S_n^{(3)}(x)$ der Fourierschen Kosinusreihe folgender einstufiger Treppenfunktion monoton wachsend sind:

$$f(x) = 0, \quad \text{für } 0 \leq x \leq a; \quad f(x) = b, \quad \text{für } a < x \leq \pi; \quad (0 < a < \pi; \quad b > 0) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37).$$

Die Kosinusreihe dieser Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{2b}{\pi} \left\{ \frac{\pi - a}{2} - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin \nu a \cos \nu x}{\nu} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38).$$

Da man nun durch gliedweise Differentiation und Unterdrückung des positiven konstanten Faktors $\dfrac{2b}{\pi}$ die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu a \sin \nu x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (39)$$

erhält, so ist unsere auf die Treppenfunktion $f(x)$ unter (37) bezügliche Behauptung schon bewiesen, da die $S_n^{(3)}(x)$ der Reihe (39) im Intervalle $0 < x < \pi$ sämtlich positiv sind.

Der Übergang von der einstufigen Treppenfunktion zu einer mehrstufigen, und von da zu einer beliebigen monotonen Funktion ist sehr leicht.

[14]) Ich verweise insbesondere auf die Arbeit: W. Blaschke und G. Pick: Distanzschätzungen im Funktionenraum II, Math. Annalen, Bd. 77 (1916), S. 277 bis 300. — Hier erwähne ich, daß Herr Ph. Frank in seiner Arbeit „Über das Vorwiegen des ersten Koeffizienten in der Fourierentwicklung einer konvexen Funktion" [Math. Annalen, Bd. LXXVII, 1916, S. 301 bis 302] eine interessante Eigenschaft der Sinusreihe einer positiven und konvexen Funktion veröffentlicht hat. Interessante Untersuchungen über im Intervalle $0 < x < \pi$ positive Sinusentwicklungen hat neuerdings Herr W. Rogosinski veröffentlicht in seiner Arbeit: „Über positive harmonische Entwicklungen und typisch-reelle Potenzreihen." Math. Zeitschrift, Bd. 35 (1932), S. 93 bis 121.

[15]) Ist die (etwa monoton zunehmende) Funktion $f(x)$ nicht identisch konstant im ganzen Intervalle $0 \leq x \leq \pi$, so sind die $S_n^{(3)}(x)$ im Intervalle $0 \leq x \leq \pi$ sogar „im strengeren Sinne" monoton, d. h. es ist immer $S_n^{(3)}(x_1) < S_n^{(3)}(x_2)$, wenn $0 \leq x_1 < x_2 \leq \pi$. ($S_0^{(3)}(x) \equiv a_0$ ist natürlich ausgenommen.) Dies folgt leicht aus dem Umstande, daß jetzt (für $n \geq 1$) $S_n^{(3)}(x) \equiv$ konst. unmöglich ist, z. B. weil sicher $a_1 \neq 0$.

§ 4. Über die Schlichtheit der arithmetischen Mittel schlichter Potenzreihen.

11. Herr G. Szegö hat den bemerkenswerten Satz bewiesen, daß sämtliche Partialsummen

$$c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (40)$$

einer beliebigen, im Einheitskreise $|z| < 1$ regulären und schlichten Potenzreihe

$$w = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (41)$$

schlicht sind im Kreise $|z| < \frac{1}{4}$ (und daß sich in diesem Satze die Konstante $\frac{1}{4}$ durch keine größere Zahl ersetzen läßt).

Ich setze nun voraus, daß die Koeffizienten c_n in der Potenzreihe (41) sämtlich reell sind, und (was dann keine weitere wesentliche Beschränkung ist) daß bei der konformen Abbildung der oberen Hälfte des Einheitskreises der z-Ebene ein Gebiet der Bildebene w entspricht, das da ebenfalls in der oberen Halbebene liegt. Ich will nun weiter annehmen, daß die Begrenzung des konformen Bildes des Einheitskreises in der w-Ebene eine einfache geschlossene Kurve (Jordankurve) sei (die jedenfalls symmetrisch zur u-Achse ist), die aber noch weiter der wesentlichen Beschränkung unterworfen sei, daß jede zur v-Achse parallele gerade Linie in der $w = u + vi$-Ebene diese Jordansche Begrenzungskurve entweder in keinem Punkte, oder einem Punkte, oder in zwei Punkten trifft, oder schließlich eine einzige geradlinige Strecke mit ihr gemeinsam hat. (Das trifft jedenfalls zu, wenn die Bildfigur konvex ist.) Wird dann

$$w(e^{i\Theta}) = u(\Theta) + i\,v(\Theta) \qquad (42)$$

gesetzt, wo

$$u(\Theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\Theta \quad (43), \qquad v(\Theta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin n\Theta \quad (44),$$

so ist $v(\Theta)$ positiv im Intervalle $0 < \Theta < \pi$ und $u(\Theta)$ monoton abnehmend im selben Intervalle. Daraus folgt aber, daß die Mittel dritter Ordnung $S_n^{(3)}(\Theta)$ der Reihe (44) positiv sind (Satz I), und daß die Mittel dritter Ordnung $\sum_n^{(3)}(\Theta)$ der Reihe (43) (im strengeren Sinne) monoton abnehmend sind (Satz III). Daraus folgt aber, daß die Kurve $w = \sum_n^{(3)}(\Theta) + i S_n^{(3)}(\Theta)$ eine Jordankurve ist. Ich habe also gefunden, daß, unter den soeben genannten einschränkenden Bedingungen, sämtliche arithmetischen Mittel dritter Ordnung $S_n^{(3)}(z)$ der Potenzreihe (41) im ganzen Einheitskreise schlicht sind ($S_0^{(3)}(z) = c_0$ natürlich ausgenommen). Ich formuliere das folgende speziellere Theorem:

Satz IV. Ist die Potenzreihe mit lauter rellen Koeffizienten

$$w = f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots \qquad (45)$$

regulär und schlicht[16]) für $|z| < 1$, und ist das von ihr auf die komplexe w-Ebene entworfene Bild K des Kreises $|z| < 1$ konvex[17]), so sind die arithmetischen Mittel dritter Ordnung $S_n^{(3)}(z)$ der Partialsummen der Potenzreihe (45) sämtlich schlicht im ganzen Einheitskreise $|z| < 1$.

Das von $S_n^{(3)}(z)$ entworfene schlichte Bild liegt in K; das letztere ist sogar schon für $S_n^{(1)}(z)$ richtig[18]).

Weitere Resultate dieser Art möchte ich an anderer Stelle mitteilen.

Anhang.

Beweis des Satzes, daß die arithmetischen Mittel dritter Ordnung der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n \sin n\Theta$ im Intervalle $0 < \Theta < \pi$ positiv sind.

12. Da die erzeugende Funktion der Reihe $1 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \cos n\Theta$ bekanntlich die Form

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\Theta + r^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\Theta \qquad (46)$$

16) D. h. $f(z_1) \neq f(z_2)$, wenn $z_1 \neq z_2$, $|z_1|, |z_2| < 1$.

17) Im Endlichen gelegen, oder auch nicht.

18) S. L. Fejér: Über gewisse durch die Fouriersche und Laplacesche Reihe definierten Mittelkurven und Mittelflächen, Rendiconti di Palermo, Bd. XXXVIII (1914).

hat, so erhalte ich hieraus durch Differentiation nach Θ die erzeugende Funktion der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n \sin n\,\Theta$:

$$F(r) = r \sin \Theta \frac{1 - r^2}{(1 - 2r\cos\Theta + r^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} n \sin n\,\Theta \cdot r^n \quad . \quad . \quad . \quad (47).$$

Da ich beweisen will, daß $S_n^{(3)}(\Theta) > 0$, d. h. $s_n^{(3)}(\Theta) > 0$ ist für $0 < \Theta < \pi$, so habe ich nach § 1 nur zu zeigen, daß die Koeffizienten der Potenzreihe von $\frac{F(r)}{(1-r)^4}$ sämtlich positiv sind für $0 < \Theta < \pi$ (mit Ausnahme von $s_0^{(3)}(\Theta) = 0$). Nach (47) ist

$$\frac{F(r)}{(1-r)^4} = r \sin\Theta \cdot \frac{1}{1-r^2} \cdot \left(\frac{1-r^2}{(1-r)^2(1-2r\cos\Theta + r^2)}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48).$$

Da aber bekanntlich

$$\frac{1-r^2}{(1-r)^2(1-2r\cos\Theta+r^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sin(n+1)\frac{\Theta}{2}}{\sin\frac{\Theta}{2}}\right)^2 r^n \quad . \quad . \quad (49) \quad \text{und} \quad \frac{1}{1-r^2} = \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \quad (50),$$

so ist unmittelbar klar, daß sämtliche Koeffizienten der Potenzreihe von $\frac{F(r)}{(1-r)^4}$ nichtnegativ sind für $0 < \Theta < \pi$. Daß sie sogar positiv sind für $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgt aus der Tatsache, daß die ersten zwei Koeffizienten in der Potenzreihe

$$\left(\frac{1-r^2}{(1-r)^2(1-2r\cos\Theta+r^2)}\right)^2 = \left(1 + 4\cos^2\frac{\Theta}{2}\cdot r + \ldots\right)^2 = 1 + 8\cos^2\frac{\Theta}{2}\cdot r + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

positiv sind für $0 < \Theta < \pi$, so daß also diese Potenzreihe mit der Potenzreihe $\frac{1}{1-r^2} = 1 + r^2 + r^4 + \ldots$ multipliziert sicher eine solche neue ergibt, die lauter positive Koeffizienten besitzt [19]).

M 11

Die schnellste Flugverbindung zwischen zwei Punkten.

Von *Philipp Frank* in Prag.

Die Frage, welchen Weg ein Flugzeug einschlagen muß, um bei gegebener Windverteilung möglichst schnell von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, ist in der letzten Zeit wiederholt behandelt worden, so von Zermelo [1]), Levi-Cività [2]) und v. Mises [3]). Es war schon bekannt [4]), daß dieses Problem, wenn die Windgeschwindigkeit nur vom Ort abhängt, mathematisch äquivalent ist mit der Frage nach dem Gang der Lichtstrahlen in einem strömenden Medium, für welche die Verteilung des „Ätherwindes" vorgegeben ist. Es war die Lösung für die „Effekte erster Ordnung" aufgestellt worden, d. h. in unserem Falle für Windgeschwindigkeiten, die so klein gegenüber der Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges sind, daß nur die in dem Verhältnis dieser Geschwindigkeiten linearen Glieder beibehalten werden müssen. Wenn man dieses Problem der Lichtfortpflanzung in einem „strömenden Medium" ohne Vernachlässigungen behandeln will, so kann man an Stelle eines isotropen „strömenden" ein anisotropes, aber ruhendes Medium setzen. Nur ist die Anisotropie eine allgemeinere, als sie in der Kristalloptik zugrunde gelegt wird.

Man muß vielmehr die Formeln für den Strahlengang in allgemein anisotropen Medien heranziehen, d. h. in solchen, wo die Lichtgeschwindigkeit in beliebiger Weise vom Ort und der Richtung des Lichtstrahls abhängt.

[19]) Ich bemerke beiläufig, daß aus (47) folgt, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n \sin n\,\Theta$ das Cauchysche Produkt der beiden Reihen $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\cos n\,\Theta$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\sin n\,\Theta$ ist.

[1]) Diese Zeitschr. 11, 1931, S. 114 bis 124.

[2]) Diese Zeitschr. 11, 1931, S. 314 bis 320.

[3]) Diese Zeitschr. 11, 1931, S. 373 bis 381.

[4]) Ph. Frank: Mathematische Analogie zwischen einem Problem aus der Optik bewegter Medien und eine Aufgabe aus dem Gebiet der Flugzeugbewegung. Physik. Zeitschr. 19, 1918, S. 2 bis 4.

v. Mises[5]) hat bereits darauf hingewiesen, daß die schnellste Bahn eines Flugzeuges bei Wind gewisse Analogien mit Lichtstrahlen hat, insbesondere hat er gezeigt, daß an der Trennungsfläche zwischen zwei Gebieten verschiedener Windgeschwindigkeit ein Gesetz für die Richtungsänderung der schnellsten Flugzeugbahn gilt, das die Gestalt des Snelliusschen Brechungsgesetzes der Optik hat. Es tritt nur beim Flugzeug eine wesentliche Komplikation dadurch ein, daß immer zwei Richtungen eine Rolle spielen: die der Tangente an die Flugzeugbahn und die der Flugzeugachse. Die Analogie zwischen Flugzeugbahn und Lichtstrahl wird aber vollkommen, wenn man in der genannten Art die Optik anisotroper Medien heranzieht. Hier spielen auch überall zwei Richtungen eine Rolle: die des Lichtstrahles und die der Normalen auf die Wellenfläche. Wenn wir im folgenden das Navigationsproblem des Flugzeuges als ein Problem des Strahlenganges in einem anisotropen Medium behandeln, werden wir sehen, daß diese beiden Richtungen vollkommen den beiden ausgezeichneten Richtungen bei der Flugzeugbewegung entsprechen.

1. Analogie zwischen Flugzeugbahn und Lichtstrahl. Jeder Raumpunkt sei durch den Lagevektor $\mathfrak{r}$ mit den Komponenten x, y, z festgelegt; dann sei die Windgeschwindigkeit $\mathfrak{W}(\mathfrak{r})$ als eine Funktion des Ortes gegeben. Wir bezeichnen dann mit $\bar{\mathfrak{s}}$ den Einheitsvektor in der Richtung der Flugzeuggeschwindigkeit in bezug auf ein raumfestes System, mit $\bar{\mathfrak{q}}$ den Einheitsvektor der Flugzeuggeschwindigkeit in bezug auf die bewegte Luft, mit v_0 den Betrag der „Eigengeschwindigkeit" des Flugzeuges. Wenn v der Betrag der gesamten Geschwindigkeit des Flugzeuges in bezug auf ein raumfestes System ist, besteht die Beziehung

$$v\,\bar{\mathfrak{s}} = v_0\,\bar{\mathfrak{q}} + \mathfrak{W}(\mathfrak{r}) \qquad \qquad (1).$$

Daher ist $v_0\,\bar{\mathfrak{q}} = v\,\bar{\mathfrak{s}} - \mathfrak{W}$, und wenn wir auf beiden Seiten das skalare Produkt des Vektors mit sich selbst bilden,

$$v_0^2 = v^2 - 2\,v\,\bar{\mathfrak{s}}\,\mathfrak{W} + W^2 \qquad \qquad (2),$$

wenn wir mit $W = |\mathfrak{W}|$ den Betrag der Windgeschwindigkeit bezeichnen. Durch Auflösung von (2) ergibt sich, wenn wir die Windgeschwindigkeit kleiner als die Eigengeschwindigkeit, also $W < v_0$ voraussetzen, eine einzige positiv reelle Lösung

$$v(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}) = \bar{\mathfrak{s}}\,\mathfrak{W} + \sqrt{(\bar{\mathfrak{s}}\,\mathfrak{W})^2 + v_0^2 - W^2} \qquad \qquad (3).$$

Man sieht, daß der Betrag v der Flugzeuggeschwindigkeit als Funktion des Ortes $\mathfrak{r}$ und der Bahnrichtung $\bar{\mathfrak{s}}$ durch (3) gegeben ist. Die Zeit, in der das Flugzeug von einem Punkt P_0 zu einem anderen Punkt P_1 gelangt, ist dann durch das Integral

$$J = \int_{u_0}^{u_1} \frac{\sqrt{\mathfrak{r}'\,\mathfrak{r}'}\,d\,u}{v(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})}, \qquad \mathfrak{r}' = \frac{d\,\mathfrak{r}}{d\,u} \qquad \qquad (4)$$

gegeben. Dabei ist $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u)$ die Gleichung der Bahnkurve, $\mathfrak{r}(u_0)$ und $\mathfrak{r}(u_1)$ sind die Lagevektoren der Punkte P_0 und P_1. Für $\bar{\mathfrak{s}}$ ist in (4)

$$\bar{\mathfrak{s}} = \frac{\mathfrak{r}'}{\sqrt{\mathfrak{r}'\,\mathfrak{r}'}} \qquad \qquad (5)$$

zu setzen. Man sieht sofort, daß die Kurven $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(u)$, die dem Integral J den kleinsten Wert erteilen, die Lichtstrahlen in einem Medium sind, in dem die Lichtgeschwindigkeit v gemäß (3) vom Ort $\mathfrak{r}$ und der Strahlrichtung $\bar{\mathfrak{s}}$ abhängt. Ein solches Medium heißt ein anisotropes, weil die Lichtgeschwindigkeit nicht vom Ort allein abhängt. Die bekanntesten anisotropen Medien sind die Kristalle; doch ist die durch (3) dargestellte Anisotropie von einer Art, die nicht unter die Kristallanisotropie eingereiht werden kann.

Die durch (3) gegebene Abhängigkeit von der Strahlrichtung $\bar{\mathfrak{s}}$ spielt aber in der Optik bei folgendem Problem eine Rolle: der betrachtete Körper sei homogen und isotrop, d. h. die Lichtgeschwindigkeit habe unabhängig von Ort und Strahlrichtung den konstanten Betrag v_0. Der Körper möge sich aber bewegen und dadurch auch das Medium, in dem die Lichtfortpflanzung stattfindet, den „Äther", in einen Strömungszustand versetzen. Im Punkte $\mathfrak{r}$ möge die „Äthergeschwindigkeit in bezug auf den Körper" durch das Vektorfeld $\mathfrak{W}(\mathfrak{r})$ gegeben sein. Bezeichnen wir mit $\bar{\mathfrak{s}}$ den Einheitsvektor in der Richtung der „Lichtgeschwindigkeit in bezug auf den Körper", mit $\bar{\mathfrak{q}}$ den Einheitsvektor in der Richtung der „Geschwindigkeit des Lichtes in bezug auf den Äther", mit v den Betrag der „Lichtgeschwindigkeit in bezug auf den Körper", so gilt offenbar Gl. (1). Infolgedessen ist die Abhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit v von Ort und Strahlrichtung durch (3) gegeben. Man kann also die Lichtfortpflanzung in isotropen bewegten Körpern als ein Problem der Lichtfortpflanzung in ruhenden anisotropen Körpern behandeln.

[5]) L. c.

2. Zusammenstellung der verwendeten Formeln aus der Optik allgemein anisotroper Medien. Man kann hier nicht die Formel für die Lichtfortpflanzung in Kristallen verwenden, da diese eine andere Art der Anisotropie zeigen. Man muß vielmehr die Formel für allgemeine anisotrope Medien heranziehen, wie sie von M. Herzberger[6]) und dem Verf.[7]) entwickelt worden sind. Wir führen anstatt $v(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})$ zur Vereinfachung der Formeln seinen reziproken Wert

$$\mu(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}}) = \frac{1}{v(\mathfrak{r}, \bar{\mathfrak{s}})} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

ein. In der Optik wird gewöhnlich der Brechungsexponent des Mediums $\frac{c}{v}$ eingeführt; doch hat der Wert der Konstanten c, der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum auf die Gestalt der Lichtstrahlen keinen Einfluß, so daß wir hier, wo es sich um die Bahnkurven des Flugzeuges handelt, $c = 1$ setzen können.

Es sei $S(x\,y\,z) = t$ die Gleichung einer Wellenfläche zur Zeit t. Wenn t sich ändert, erhalten wir einen „Wellenzug". Dann ist durch

$$\operatorname{grad} S = \frac{\bar{\mathfrak{n}}}{w} = \mathfrak{n}(\mathfrak{r}) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

ein bestimmtes Vektorfeld, das Feld der „Normalvektoren" $\mathfrak{n}(\mathfrak{r})$ definiert. $\bar{\mathfrak{n}}$ ist der Einheitsvektor in der Richtung senkrecht zur Wellenfläche, w ist der Betrag der Geschwindigkeit, mit der sich die Wellenflächen senkrecht zu sich selbst fortpflanzen, die „Wellengeschwindigkeit". Die Lichtstrahlen dieses Wellenzuges, d. h. die Kurven, längs deren sich die Lichterregung von einer Wellenfläche zur nächsten fortpflanzt, stellen wir durch ein Feld von Einheitsvektoren $\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r})$ dar, das uns in jedem Punkte $\mathfrak{r}$ die Richtung des Lichtstrahles gibt. Dann erhalten wir zwischen $\bar{\mathfrak{s}}$ und $\mathfrak{n}$ die Beziehung:

$$\mathfrak{n} = \nabla\mu + \bar{\mathfrak{s}}(\mu - \bar{\mathfrak{s}}\nabla\mu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Darin ist $\nabla\mu$ der Vektor mit den Komponenten $\frac{\partial\mu}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\mu}{\partial\eta}$, $\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}$, wobei ξ, η, ζ die Komponenten von $\bar{\mathfrak{s}}$ nach den rechtwinkligen Koordinatenachsen sind. Also:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 \text{ oder } (\bar{\mathfrak{s}}\,\bar{\mathfrak{s}}) = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

Wenn wir $\bar{\mathfrak{s}}$ aus (8) berechnen und das Ergebnis in (9) einsetzen, erhalten wir für jeden Punkt des Raumes eine Beziehung zwischen Wellennormale und Wellengeschwindigkeit, also zwischen $\bar{\mathfrak{n}}$ und w.

Wenn $\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r})$ eine Schar von Lichtstrahlen darstellt, die zu einem bestimmten Wellenzuge gehören, so entspricht diesem nach (8) ein bestimmtes $\mathfrak{n}(\mathfrak{r})$, das mit $\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r})$ zusammen wegen (7) und (9) den Bedingungen

$$\operatorname{rot}\mathfrak{n}(\mathfrak{r}) = 0 \text{ und } \bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r})\,\bar{\mathfrak{s}}(\mathfrak{r}) = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10)$$

genügt. Wir betrachten nun zwei Medien mit verschiedenen Brechungsexponenten μ_1 und μ_2 und einen Wellenzug, der die Trennungsfläche beider Medien durchsetzt. Die Lichtstrahlen seien dann durch $\bar{\mathfrak{s}}_1$ bzw. $\bar{\mathfrak{s}}_2$ gegeben. Da μ_1 und μ_2 in verschiedener Weise von den Strahlrichtungen abhängen können, wird auch die Beziehung zwischen Normalvektor und Strahlvektor in den beiden Medien eine im allgemeinen verschiedene sein. Wir erhalten daher für die beiden Normalvektoren $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ die Beziehungen

$$\mathfrak{n}_1 = \nabla\mu_1 + \bar{\mathfrak{s}}_1(\mu_1 - \bar{\mathfrak{s}}_1\nabla\mu_1), \quad \mathfrak{n}_2 = \nabla\mu_2 + \bar{\mathfrak{s}}_2(\mu_2 - \bar{\mathfrak{s}}_2\nabla\mu_2) \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

Das Gesetz für die Änderung der Richtung des Lichtstrahles beim Durchsetzen der Trennungsfläche, das Brechungsgesetz lautet dann

$$\mathfrak{n}_1\bar{\mathfrak{t}} = \mathfrak{n}_2\bar{\mathfrak{t}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12),$$

wenn $\bar{\mathfrak{t}}$ irgendein Einheitsvektor tangential zu dieser Fläche bedeutet. Die Gl. (12) ist nichts anderes als die Gestalt der Gl. (10) für den Fall, daß $\mathfrak{n}(\mathfrak{r})$ ein Vektorfeld mit einer Unstetigkeit an der Trennungsfläche ist; in diesem Falle geht nämlich rot $\mathfrak{n}$ in $(\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2, \bar{\mathfrak{t}})$ über.

3. Das Brechungsgesetz für die schnellste Flugzeugbahn beim Durchsetzen der Trennungsfläche zwischen zwei Luftschichten verschiedener Geschwindigkeit. Wir überlegen nun zunächst, welche Bedeutung der Normalvektor $\mathfrak{n}$ für die Flugzeugbewegung hat, wenn $\bar{\mathfrak{s}}$ der Einheitsvektor in der Richtung der Bahntangente ist. Aus Gl. (8) und (6) folgt zunächst, wenn wir für v seinen Wert aus (3) einsetzen,

[6]) M. Herzberger, Strahlenoptik, Berlin 1931.
[7]) Ph. Frank, Zeitschr. f. Phys., Bd. 80, 1933, S. 4 ff.

$$\overline{V}_\mu = -\frac{1}{v^2}\left[\mathfrak{W} + \frac{(\bar{\mathfrak{s}}\,\mathfrak{W})\,\mathfrak{W}}{\sqrt{(\bar{\mathfrak{s}}\,\mathfrak{W}) + v_0^2 - W^2}}\right] \quad \ldots \ldots \ldots \quad (13)$$

und schließlich

$$\mathfrak{n} = \frac{1}{v\sqrt{(\bar{\mathfrak{s}}\,\mathfrak{W})^2 + v_0^2 - W^2}}\,(v\,\bar{\mathfrak{s}} - \mathfrak{W}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14).$$

Ersetzen wir die Quadratwurzel im Nenner nach Gl. (1) durch $v - \bar{\mathfrak{s}}\,\mathfrak{W}$ und berücksichtigen die aus (1) folgende Beziehung $v = v_0\,(\bar{\mathfrak{q}}\,\bar{\mathfrak{s}}) + \bar{\mathfrak{s}}\,\mathfrak{W}$, so wird aus (14)

$$\mathfrak{n} = \frac{\bar{\mathfrak{n}}}{w} = \frac{\bar{\mathfrak{q}}}{v_q} \qquad v_q = v\,(\bar{\mathfrak{s}}\,\bar{\mathfrak{q}}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (15).$$

Daraus folgt aber

$$\bar{\mathfrak{n}} = \bar{\mathfrak{q}} \qquad w = v_0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (16),$$

d. h. die Richtung der Geschwindigkeit des Flugzeuges in bezug auf die (bewegte) Luft, die „relative“ Geschwindigkeit, ist die Richtung der Wellennormale in unserem anisotropen Medium. Wenn also die Bahntangente des Flugzeuges die Richtung des Lichtstrahles hat, so hat die Achsenrichtung die der Wellennormalen. Die Wellengeschwindigkeit w ist dann die Projektion der gesamten Flugzeuggeschwindigkeit v auf die Achsenrichtung.

Wir betrachten dann zwei Luftgebiete mit verschiedenen konstanten Windgeschwindigkeiten. Die Normalvektoren in den beiden Gebieten seien dann $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$, die Wellengeschwindigkeiten w_1, w_2 also $\mathfrak{n}_1 = \frac{\bar{\mathfrak{n}}_1}{w_1}$ $\mathfrak{n}_2 = \frac{\bar{\mathfrak{n}}_2}{w_2}$. Wenn wieder $\bar{\mathfrak{t}}$ ein Einheitsvektor tangential zur Trennungsfläche ist, folgt aus (12)

$$\frac{\bar{\mathfrak{n}}_1\,\bar{\mathfrak{t}}}{\bar{\mathfrak{n}}_2\,\bar{\mathfrak{t}}} = \frac{w_1}{w_2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17)$$

bezeichnen wir mit ψ_1, ψ_2 die Winkel zwischen der Wellennormale und dem Einheitsvektor $\bar{\mathfrak{t}}$, so wird aus (17)

$$\frac{\cos\psi_1}{\cos\psi_2} = \frac{w_1}{w_2}, \qquad \frac{\cos\psi_1}{\cos\psi_2} = \frac{v_q^{(1)}}{v_q^{(2)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (18),$$

wenn wir mit v_q^1, v_q^2 die Werte von v_q in den beiden Medien bezeichnen. Führen wir dann die Winkel

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \psi_1, \qquad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \psi_2 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

ein, so können wir Gl. (18) auch

$$\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{v_q^{(1)}}{v_q^{(2)}} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

schreiben, also in der Form des gewöhnlichen Brechungsgesetzes. Die Bedeutung dieser schon von v. Mises[8]) aufgestellten Beziehung ist aber genau die des optischen Brechungsgesetzes für anisotrope Medien. Von der des Snelliusschen Brechungsgesetzes für isotrope Medien unterscheidet sie sich in folgenden Punkten: es wird nicht unmittelbar ein Gesetz für die Änderung der Strahlrichtung beim Durchgang durch die Trennungsfläche ausgesprochen, sondern für die Änderung der Wellennormalen, d. h. in unserem Fall nach (16) der Achsenrichtung des Flugzeuges. Die Winkel φ_1, φ_2, welche diese Richtungen mit dem Einfallslot bilden, haben hier eine etwas andere Bedeutung. Die durch $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ gelegte Ebene schneidet die Trennungsfläche in einer Kurve, deren Richtung im Durchgangspunkte unserer Bahn durch $\bar{\mathfrak{t}}$ gegeben ist. Unter dem Einfallslot ist dann die Normalrichtung auf $\bar{\mathfrak{t}}$ in der Ebene der $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ bzw. $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ zu verstehen. Der Quotient auf der rechten Seite ist nicht nur von den Medien, sondern auch von der Richtung des einfallenden Strahls, in unserm Fall also von der Richtung der Flugzeugachse vor dem Durchgang durch die Trennungsfläche abhängig. Es ist hier auch klar, warum auf der rechten Seite nicht der Quotient aus den Flugzeuggeschwindigkeiten selbst steht, sondern aus ihren Projektionen auf die Achsenrichtung. Bei den anisotropen Medien stehen hier nämlich nach (17) nicht die Strahl-, sondern die Wellengeschwindigkeiten. Diesen entsprechen aber nach (16) gerade die Komponenten der Flugzeuggeschwindigkeiten in der Richtung der Flugzeugachse. M 14

[8]) L. c. Gl. (4).

Sur les probabilités discontinues des événements „en chaîne".

Par *Jacques Hadamard*[1]) et *Maurice Fréchet* à Paris.

Introduction. — Le demi siècle qui vient de s'écouler aura vu une renaissance remarquable du Calcul des Probabilités. Une foule de questions nouvelles ont été soulevées dans cet ordre d'idées et ont attiré l'attention des géomètres les plus connus de notre époque. Parmi toutes les contributions ainsi apportées à une étude qui semblait naguère parvenue à un état presque définitif, celle de M. von Mises n'aura pas été une des moins importantes. Il aura été, en particulier, l'un des premiers à saisir et à montrer l'importance et la diversité des applications que l'on a tirées (qu'il a tirées lui même) et que l'on tirera, de la théorie des événements „en chaîne“ dont nous voudrions ici décrire l'état actuel (d'ailleurs en cours de développement rapide).

Les événements en chaîne. L'expression d'événements „en chaîne“, due à Markoff[2]) désigne des événements incompatibles dont les probabilités, avant une des épreuves d'une certaine série, dépendent des résultats des épreuves précédentes. Le cas examiné particulièrement par Markoff est celui où ces événements E_1, $E_2, \ldots$, E_r sont en nombre fini, où les épreuves forment une suite discontinues et où il y a une probabilité déterminée p_{jk} qu'on passe, en une épreuve, de E_j à E_k.

On peut considérer comme une preuve de l'importance de l'étude des probabilités des événements „en chaîne“, le fait qu'un certain nombre de mathématiciens s'y sont trouvés conduits indépendamment sans connaître les travaux de leurs prédécesseurs[3]). En particulier comme Poincaré, comme M.M. Urban, Paul Lévy, Hostinsky, Chapman, comme nous, M. von Mises s'est engagé dans cette étude sans avoir eu connaissance des travaux de Markoff, travaux fondamentaux, mais publiés en russe.

Les points de vue de Markoff et de Poincaré. Par contre, c'est la contribution de Poincaré qui, bien connue de tous, a été à l'origine d'un grand nombre des travaux ultérieurs et il ne sera peut-être pas sans intérêt de signaler combien sont différents les points de départ qui ont amenés Markoff et Poincaré au même point d'arrivée.

A l'époque de Markoff, la théorie des variables aléatoires indépendantes avait réalisé des progrès remarquables, mais les résultats concernant les variables aléatoires dépendantes se réduisaient à peu de chose. Markoff a compris qu'on ne pouvait aborder ce nouveau cas qu'en s'adressant à une dépendance qui ne serait pas quelconque et qui serait assez simple.

Son premier mérite est d'avoir su distinguer un mode de dépendance se prêtant d'une part aux extensions désirées, se présentant d'autre part effectivement à des applications importantes. Ces extensions, si elles étaient réalisables, étaient cependant loin d'être immédiates et c'est le second mérite de Markoff d'y être parvenu en toute rigueur[4]).

S'il a beaucoup fait, il restait cependant à élucider le cas singulier et à étendre ses résultats hors de l'hypothèse de Markoff, celle d'un nombre fini d'événements „en chaîne“ et d'une suite discrète d'épreuves. Les travaux postérieurs à Markoff sont bien près d'avoir épuisé l'étude du cas singulier dans cette hypothèse. Mais l'étude du cas où l'on s'affranchit de cette hypothèse est beaucoup moins avancée.

C'est d'ailleurs l'hypothèse contraire qui intéressait le plus Poincaré. Et s'il s'est d'abord placé sous le régime de la première dans le problème du battage des cartes, c'est seulement pour sérier les difficultés. Les préoccupations de Poincaré dans ce domaine sont, en effet, tout autres que celles de Markoff. Il s'agit surtout pour lui de justifier le principe ergodique qui apparaissait, dès le moment où il écrivait, comme fondamental pour les théories cinétiques et qui, pour cette raison, a pris depuis une importance chaque jour croissante dans toute la Physique contemporaine. Il s'agissait même, en dernière analyse, de justifier sa conception profonde du hasard considéré comme résultant d'une part, de la disproportion entre les causes et les effets, d'autre part — et c'est ce qui nous intéresse particulièrement ici — de la multiplicité des causes. C'est déjà ce dernier mécanisme qui intervient dans le problème classique de la roulette et qui, comme il le montre, explique

[1]) M. Hadamard, en voyage au moment de l'impression, n'a pu participer à la correction des épreuves.

[2]) Nous renverrons, dans la suite, en ce qui concerne le détail des références bibliographiques, à la liste très complète qui figure dans le petit livre de M. Hostinsky: „Les méthodes analytiques du Calcul des Probabilités“, chez Gauthier-Villars, 1930. Nous n'avons donné ici que les titres des publications postérieures à cette liste.

[3]) Nous sommes si pénétrés de l'importance de cette question que l'un de nous en a fait le sujet de plusieurs cours semestriels aux Facultés des Sciences de Strasbourg et de Paris et, plus encore, que l'autre y a consacré plusieurs pages dans un ouvrage d'enseignement général: dans son „Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique“.

[4]) Il est intéressant de signaler qu'un exemple important de problèmes relevant des événements „en chaîne“ a été signalé déjà par Bernoulli et traité par Laplace. C'est le problème du mélange des urnes. Laplace a employé à cette occasion sa méthode de passage du discontinu au continu. Pour une solution directe et plus complète, voir, Fréchet, Recherches modernes sur le Calcul des Probabilités, chez Gauthier-Villars, en cours d'impression.

qu'on trouve la probabilité $\frac{1}{2}$ pour la rouge comme pour la noire, quelle que soit la loi de probabilité plus ou moins arbitraire qui préside au lancé de la bille. De même, dans le battage des cartes, la probabilité de tirer une carte déterminée quelconque d'un jeu de 32 cartes ne devient égale à $\frac{1}{32}$ qu'au bout d'un nombre infini de coups de battage; et la même circonstance — influence collective de phénomènes irréguliers, mais en très grand nombre — produit une régularisation analogue dans le cas général des événements „en chaîne“.

Le battage des cartes, cas particulier d'une suite d'événements en chaîne, introduit d'ailleurs la plupart des circonstances qui peuvent se présenter dans le cas général, mais non pas toutes cependant. Si, en effet, on désigne par p_{ik} la probabilité pour qu'en un coup de battage une carte de rang i passe au rang k, on a nécessairement la condition (T'): $\sum_{i=1}^{i=r} p_{ik} = 1$. Car le premier membre est la probabilité pour qu'après une épreuve, l'une des cartes soit venue occuper le rang k, événement clairement certain. Par contre, pour des événements „en chaîne“ quelconques, ce raisonnement ne subsiste plus, tandis qu'on peut toujours écrire la condition (T): $\sum_k p_{ik} = 1$, puisqu'après la réalisation de l'événement E_i, l'épreuve suivante amènera nécessairement la réalisation de l'un des événements E_k.

Les résultats de Markoff. Passons maintenant aux résultats acquis. Dans l'hypothèse de Markoff, on peut désigner par $P_{jk}^{(n)}$ la probabilité de passer en n épreuves de l'événement E_j à l'événement E_k. On pose en particulier $P_{jk}^{(1)} = p_{jk}$ pour simplifier l'écriture. Markoff a obtenu le résultat fondamental suivant: si aucune des probabilités p_{jk} n'est nulle, les $P_{jk}^{(n)}$ tendent, quand n croît indéfiniment, vers des valeurs limites P_k indépendantes de l'événement initial E_j. Il en a tiré une conclusion plus importante encore, quoique immédiate, concernant une variable aléatoire prenant pour chaque événement E_k une valeur connue x_k. Sa valeur, après n épreuves à partir de l'événement E_j, est une variable aléatoire qui peut être désignée par $X_j^{(n)}$ et dont la valeur moyenne est

$$\mathfrak{M}\, X_j^{(n)} = \sum_{k=1}^{k=r} x_k\, P_{jk}^{(n)}.$$

De sorte que dans le cas de Markoff où tous les p_{jk} sont $\neq 0$, cette valeur moyenne tend vers une limite indépendante de l'état initial

$$M = \sum_{k=1}^{k=r} x_k\, P_k.$$

Il est clair que, dans la même hypothèse, la valeur moyenne $M_j^{(n)}$ de la moyenne arithmétique

$$A_j^{(n)} = \frac{1}{n}\left(X_j^{(1)} + X_j^{(2)} + \ldots + X_j^{(n)}\right)$$

tend aussi vers M.

Mais Markoff observe de plus qu'alors l'écart $(\mathfrak{M}\, A_j^{(n)} - M)$, non seulement est infiniment petit avec $\frac{1}{n}$, mais est d'un ordre au moins égal au premier.

D'autre part, l'écart quadratique moyen $\mu_j^{(n)}$ de $X_j^{(n)}$ converge évidemment vers

$$\mu = \sqrt{\sum_k P_k (x_k - M)^2}.$$

Si les résultats des épreuves étaient indépendants, l'écart quadratique moyen $E_j^{(n)}$ de la moyenne arithmétique $A_j^{(n)}$ serait égal à $\frac{\mu}{\sqrt{n}}$, c'est à dire que $E_j^{(n)} \sqrt{n}$ tendrait vers μ. Markoff a démontré que si les p_{jk} sont tous $\neq 0$, $E_j^{(n)} \sqrt{n}$ a encore une limite, mais cette limite, qu'il a calculée, est en général différente de μ.

Ces importants résultats de Markoff sont restés ignorés plusieurs années. C'est indépendamment que Poincaré a établi la convergence des $P_{jk}^{(n)}$ dans le problème du battage des cartes. La démonstration de Poincaré a le grand intérêt, comme l'un de nous l'a fait précédemment remarquer, de se transposer sans effort et de devenir plus naturelle encore dans le cas d'une suite continue d'événements „en chaîne“. Toutefois, elle a paru compliquée, par l'emploi qu'elle faisait des nombres complexes à n dimensions. Plusieurs auteurs ont cherché à la simplifier et, chose curieuse, en s'ignorant mutuellement. M. Urban a observé que grâce aux relations évidentes

$$P_{jk}^{(n+1)} = \sum_i p_{ji}\, P_{ik}^{(n)}; \qquad p_{ji} \geq 0; \qquad \sum_i p_{ji} = 1.$$

$P_{jk}^{(n+1)}$ se trouvait compris entre le plus petit $p_k^{(n)}$ et le plus grand $P_k^{(n)}$ des $P_{1k}^{(n)}, \ldots, P_{rk}^{(n)}$. Ce „principe de moyenne“ montre que $p_k^{(n)}$ et $P_k^{(n)}$ déterminent, quand n croît, deux suites monotones convergeant vers deux limites p_k et P_k.

M. Paul Lévy, dans son livre, a complété le raisonnement en observant (sans démonstration) que $P_k^{(n)} - p_k^{(n)}$ est inférieur au terme correspondant d'une progression géométrique convergente d'où finalement $P_k = p_k$. Enfin l'un de nous, puis M. Hostinsky ont donné une démonstration explicite et complète basée sur les deux mêmes observations. Ce sont précisément celles dont s'était servi Markoff.

Le cas positivement régulier. Dans toutes ces demonstrations, on supposait les $p_{jk} \neq 0$, donc $p_k^{(1)} > 0$ et, comme $p_k \geq p_k^{(1)}$ on voit que les limites $P_k = p_k$ sont toutes $\neq 0$. On complète facilement le raisonnement de façon à obtenir la condition nécessaire et suffisante correspondante. Pour que les $P_{jk}^{(n)}$ tendent vers des limites non nulles et indépendantes de j, il faut et il suffit que, pour au moins une valeur de n, le tableau $D^{(n)}$ des $P_{jk}^{(n)}$ ait tous ses éléments $\neq 0$.

On pourrait dire ce cas régulier. Seulement, dans les applications, la limite qui importe le plus, c'est la limite $M = \sum_k' x_k P_k$ et non la limite P_k. Comme les x_k sont de signes quelconques le fait que les P_k sont tous positifs devient secondaire. Il semble donc préférable d'appeler cas régulier le cas où les $P_{jk}^{(n)}$ ont des limites P_k indépendantes de l'état initial E_j. (En raison de la relation évidente $\sum_k' P_k = 1$, il y en a d'ailleurs toujours au moins un qui est $\neq 0$.) On réservera le nom de cas positivement régulier au cas où, de plus, tous les P_k sont positifs[5]).

On doit d'ailleurs signaler une remarque due à M. Hostinsky, qui permet de simplifier la recherche du cas positivement régulier. Il a observé, en effet, qu'on se trouve nécessairement dans ce cas si, dans le tableau D des p_{jk}, la diagonale principale et les deux diagonales qui la bordent n'ont aucun terme nul. On en conclut facilement que: la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas positivement régulier est que, pour au moins une valeur de n, la propriété de M. Hostinsky se trouve réalisée pour $D^{(n)}$.

On doit à M. von Mises une autre forme de la condition pour le cas positivement régulier. En introduisant ici une expression usitée dans la théorie des systèmes d'équations linéaires, disons qu'un tableau D de coefficients p_{ik} est décomposable si l'on peut partager les indices de 1 à r en deux groupes A, B sans éléments communs mais possédant chacun au moins un élément (soient A le groupe des indices k', B le groupe des indices k'') tels que les coefficients $p_{k'k''}$ soient tous nuls. On voit qu'en permutant au besoin les rangs des états $E_1, \ldots, E_r$, on pourra mettre D sous la forme

$p_{k'k'}$	$p_{k''k'}$
$p_{k'k''} = 0$	$p_{k''k''}$

qui s'explique d'elle même. Ceci étant: la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas positivement régulier est qu'il existe un rang ν tel que le tableau $D^{(\nu)}$ soit indécomposable et que sa diagonale principale ne soit pas toute nulle.

M. von Mises a fait ressortir la signification concrète qu'aurait le fait pour D d'être décomposable: cela voudrait dire qu'on peut répartir le groupe G des états possibles $E_1, \ldots, E_r$ en deux groupes E, S, tels qu'une entrée dans S ou une sortie de E soit impossible en une épreuve ou plus précisement que pour chaque couple d'états E_j de E, E_k de S, la probabilité p_{jk} de passer en une épreuve de E_j à E_k soit nulle.

Le cas régulier. Comme nous l'avons fait observer plus haut, c'est le cas régulier le plus général qu'il importe le plus de discerner. En modifiant convenablement le raisonnement de Markoff, on prouve[6]) que: la condition nécessaire et suffisante pour qu'on soit dans le cas régulier est que, pour au moins une valeur ν de n, le Tableau $D^{(\nu)}$ des $P_{ik}^{(\nu)}$ possède au moins une ligne dont tous les éléments $P_{1l}^{(\nu)}, \ldots, P_{rl}^{(\nu)}$ sont $\neq 0$.

[5]) Ce dernier cas est le seul (régulier) qui puisse exister pour le battage des cartes, ceci tenant à la propriété (T') qui, nous l'avons vu, caractérise ce problème.

[6]) M. Fréchet: Compléments à la théorie des probabilités discontinues „en chaîne“. Annali Sc. Norm. Sup. Pisa; vol. II, 1933, p. p. 131—162.

Ainsi pour que les $P_{ik}^{(n)}$ aient des limites (positives ou nulles) indépendantes de l'état initial E_i, il faut et il suffit qu'il existe un état E_l et un rang ν tel qu'il y ait une probabilité non nulle de passer en ν épreuves à l'état E_l à partir de chaque état initial.

Les limites P_k des $P_{ik}^{(n)}$ forment évidemment un système de solutions $x_k = P_k$ des équations linéaires

$$x_k = \sum_{j=1}^{j=r} x_j\, p_{jk}, \qquad k = 1, \ldots, r, \qquad \sum_j x_j = 1 .$$

Ces $r+1$ équations à r inconnues qui ont un sens même dans le cas singulier, ne sont pas indépendantes, comme on le voit en ajoutant les r premières. On peut montrer ([6]) que dans le cas régulier, elles ont un seul système de solutions (nécessairement ≥ 0).

Etude du cas singulier. On peut aborder l'étude du cas singulier de plusieurs manières. Les résultats de Markoff montrent que ce cas ne peut se présenter que si l'un au moins des p_{ik} est nul et s'il en est de même, à chaque valeur de n pour l'un au moins des $P_{ik}^{(n)}$. On est alors amené à considérer à part les substitutions des lettres k aux lettres i pour lesquelles l'un au moins des $P_{ik}^{(n)} = 0$. D'autre part, l'un de nous a fait observer que la théorie des évènements en chaîne est intimement liée à la théorie des groupes. C'est ainsi que les transformations $T^{(n)}$

$$y_i = \sum_k P_{ik}^{(n)} x_k$$

— celles qui transforment les $P_{kh}^{(p)}$ en $P_{ih}^{(n+p)}$ — forment un groupe.

Ces deux remarques conduisent à caractériser le cas singulier dans le battage de cartes de la façon suivante[7]) On peut supposer, sans diminuer la généralité, que pour tout couple d'indices j, k (de 1 à r) il existe au moins un entier n tel que $P_{jk}^{(n)} \neq 0$, c'est à dire au sens de M. von Mises que l'ensemble des r états possibles est indécomposable en une épreuve.

Ceci étant, on montre qu'on peut répartir les r états possibles en un certain nombre de systèmes d'états $S_1, S_2, \ldots, S_q$; systèmes deux à deux sans éléments communs et comportant tous le même nombre r' d'états (de sorte que $r = q r'$). Et ceci de façon que toute épreuve transforme chaque système S_i en un système S_j déterminé distinct du premier, les habitudes du joueur fixant la transformation de S_i en S_j, le hasard n'intervenant plus que pour déterminer la correspondance que l'épreuve établit entre les états de S_i et ceux de S_j.

Le cas le plus régulier. Les considérations précédentes auraient besoin d'être modifiées si l'on voulait passer du cas du battage des cartes au cas général des événements „en chaîne“, en raison de la propriété particulière (T'), qui, comme nous l'avons signalé en commençant, caractérise le premier de ces deux cas.

On a vu que, dans le cas régulier du battage des cartes, les probabilités limites P_k sont indépendantes à la fois de l'état initial E_i et de l'état final E_k et par suite égales à $\frac{1}{r}$. Réciproquement, pour que $P_{ik}^{(n)}$ tende, quand n croît, vers une limite P indépendante de i et de k — et alors nécessairement égale à $\frac{1}{r}$ — il faut et il suffit qu'on soit dans le cas régulier et que la condition

$$(T') \qquad \sum_i p_{ik} = 1$$

soit réalisée. On peut appeler ce cas, *le cas le plus régulier*.

L'équation en „s“. Nous venons de voir que, dans le problème du battage des cartes, on peut caractériser le cas singulier sous une forme concrète simple, laquelle, en outre, ne fait intervenir que les probabilités relatives à $n = 1$, c'est à dire les p_{ik} donnés. Ce second résultat peut être atteint même dans le cas général où la condition (T') n'est pas réalisée. On l'obtient en faisant intervenir „l'équation en s“

$$\Delta(s) = 0$$

où

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} p_{11} - s & p_{21} & \cdots & p_{r1} \\ p_{12} & p_{22} - s & \cdots & p_{r2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{1r} & p_{2r} & \cdots & p_{rr} - s \end{vmatrix} .$$

[7]) J. Hadamard: Sur le battage des cartes et ses relations avec la Mécanique Statistique, C. R. Congrès International des Mathématiciens de Bologne, 1928. A. V. p. p. 133—139.

Celle-ci a été étudiée, indépendamment de toute relation avec le Calcul des Probabilités par Frobenius et Minkowski. En supposant les $p_{ik} > 0$ et $\sum_{k=1}^{k=r} p_{ik} = 1$ pour $i = 1, \ldots, r$, Frobenius démontre que les racines de cette équation — racines dont l'une au moins est égale à 1 —, sont toutes en modules ≤ 1. On peut, en outre, démontrer que toute racine de module un de cette équation est aussi racine d'une équation binome $s^m = 1$ où m est un nombre entier. Ceci permet de caractériser le cas qu'on peut appeler le cas semi-régulier, celui où, quand n croît, les $P_{ik}^{(n)}$ ont tous des limites P_{ik} (dépendant ou non de i): il faut et il suffit pour cela que l'équation en s n'ait d'autres racines de module 1 que l'unité.

La convergence au sens de Cesàro. En se plaçant au point de vue des généralisations modernes données à la notion de limite, on peut formuler des énoncés englobant le cas singulier et, par conséquent, redonner, dans une certaine mesure, au principe ergodique une généralité ébranlée au premier abord par la découverte de ce cas[8]).

Dans le cas le plus général des événements en chaîne, c'est à dire sans qu'il y ait à s'inquiéter de savoir si quelques uns des p_{ik} sont nuls, les $P_{ik}^{(n)}$ et les valeurs moyennes $\mathfrak{M} X_i^{(n)}$ forment toujours, quand n croît, des suites convergentes, sinon au sens ordinaire, du moins au sens de Cesàro[9]). C'est à dire qu'il y a une limite au sens ordinaire quand n croît de chacune des moyennes arithmétiques

$$H_{ik}^{(n)} = \frac{1}{n}\left[P_{ik}^{(1)} + \ldots + P_{ik}^{(n)}\right]$$

$$M_i^{(n)} = \mathfrak{M} A_i^{(n)} = \frac{1}{n}\left[\mathfrak{M} X_i^{(1)} + \ldots + \mathfrak{M} X_i^{(n)}\right].$$

Dans ces conditions si l'on appelle H_{ik}, M_i les limites de ces quantités, les différences $H_{ik}^{(n)} - H_{ik}$, $M_i^{(n)} - M_i$ sont infiniment petites avec $\frac{1}{n}$. On peut démontrer[9]) que ces infiniment petits sont au moins du premier ordre. Et, même, les quantités

$$s_{ik} = \lim_{n \to \infty} \{ n\,[H_{ik}^{(n)} - H_{ik}] \}$$

peuvent être déterminées, dans le cas régulier[8]), sans itération, comme solutions uniques du système d'équations linéaires

$$s_{ik} - P_{ik} + P_k = \sum_{j=1}^{j=r} s_{ij}\, p_{jk}; \qquad k = 1, \ldots r; \qquad \sum_{k=1}^{k=r} s_{ik} = 0,$$

où les P_k sont d'ailleurs le système unique (toujours dans le cas régulier) du système d'équations linéaires

$$P_k = \sum_{j=1}^{j=r} P_j\, p_{jk}, \qquad \sum_{k=1}^{k=r} P_k = 1.$$

L'existence de la limite de $H_{jk}^{(n)}$ peut d'ailleurs être interprêtée d'une façon intéressante en observant que $H_{ik}^{(n)}$ est la valeur moyenne de la fréquence $f_{ik}^{(n)}$ avec laquelle l'événement E_k se répète au cours de n épreuves à partir de la réalisation de l'événement E_i. Ainsi, qu'on soit ou non dans le cas régulier, la valeur moyenne de cette fréquence a toujours une limite[8]). M. von Mises avait retrouvé le cas particulier de cette proposition où l'on se trouve dans le cas régulier, cas particulier déjà obtenu par Markoff.

On peut même généraliser les résultats de Markoff relatifs à l'écart quadratique moyen et établis dans le cas régulier. Appelons $E_{ik}^{(n)}$ l'écart quadratique moyen de la fréquence $f_{ik}^{(n)}$ et $\varrho_i^{(n)}$ l'écart quadratique moyen de la moyenne arithmétique $A_i^{(n)}$ des n premières valeurs de $X_i^{(1)}, \ldots, X_i^{(n)}$. Alors, qu'on soit dans le cas régulier ou non, ces deux écarts ont des limites finies quand n croît[9]). Ces limites sont toujours nulles dans le cas régulier; mais on peut, dans le cas non régulier, former des exemples où ces limites sont nulles et des exemples où ces limites sont $\neq 0$. On obtient alors une véritable généralisation du théorème de Markoff en établissant[9]) que si l'une de ces limites est nulle, et, par suite, si $E_{ik}^{(n)}$ ou $\varrho_i^{(n)}$ est infiniment petit, alors cet infiniment petit est d'ordre au moins égal à

[8]) Il vient d'être démontré pour la forme dynamique du principe ergodique, qu'alors une véritable limite existe „presque toujours“. C'est ce qu'ont établi MM. Birkhoff et Koopmann et, à leur suite, MM. von Neumann et Hopf dans des travaux d'une importance fondamentale insérés aux Proceedings de la National Academy of Sciences Américaine (tomes 17—18, 1931—1932). Voir aussi: Hopf, Berichte Ak. Wiss. Berlin, Carleman, Acta Mathematica 1932, Stone, 1932.

[9]) Fréchet, loc. cit., p. 94, note [6]).

celui de $\frac{1}{\sqrt{n}}$. On peut même former dans le cas semi-régulier[9]) l'expression des limites de $\sqrt{n}\, E_{ik}^{(n)}$ et de $\sqrt{n}\, \varrho_i^{(n)}$ en fonction des s_{ik}, p_{ik}, Π_{ik}.

Malgré la généralité des résultats précédents, il faut toutefois reconnaître que si la convergence de $P_{ik}^{(n)}$ et de $X_i^{(n)}$ se trouve établie au sens de Cesàro, les limites (en ce sens) Π_{ik} et M_i ne sont pas en général indépendantes de l'état initial. Mais, pour qu'elles en soient indépendantes, il n'est pas nécessaire qu'on se trouve dans le cas régulier. Pour que la valeur moyenne de la fréquence $f_{ik}^{(n)}$, c'est à dire pour que $\Pi_{ik}^{(n)}$ tende vers une limite Π_k indépendante de l'état initial E_i, il faut et il suffit que l'unité ne soit pas racine multiple de l'équation „en s"[10]).

En réunissant cette condition et la condition qui caractérise le cas semi-régulier, on obtient les deux conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on soit dans le cas régulier. Ces deux conditions ont été obtenues directement par deux élèves de M. Hostinsky.

Pour qu'on soit dans le cas régulier, il faut (Konecny) et il suffit (Kaucky) 1° que l'équation „en s" n'ait pas d'autres racines de module un que l'unité, 2° que l'unité n'en soit pas racine multiple.

Seulement par la méthode employée ici, nous pouvons distinguer nettement les effets respectifs des conditions 1° et 2°.

Forme de $P_{ik}^{(n)}$ en fonction de n. Un autre résultat permet de mettre inversement en évidence les effets de la non-réalisation des conditions 1° et 2°. C'est un résultat qui est basé sur la forme générale de la dépendance des $P_{ik}^{(n)}$ vis à vis de n. M. Romanovsky paraît avoir été le premier à chercher à expliciter cette forme pour l'ensemble des valeurs de n et non plus seulement pour les grandes valeurs de n. Il s'est particulièrement occupé du cas où toutes les racines s_g de l'équation en s sont simples, cas où il a pu mettre l'expression de $P_{ik}^{(n)}$ sous une forme particulièrement commode

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{g=1}^{g=r} s_g^{n-1} \beta_{gi} \gamma_{gk}.$$

Mais on peut même aborder le cas général en partant de l'observation suivante. La relation

$$P_{ik}^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{j=r} P_{ij}^{(n)} p_{jk}$$

quand on l'écrit

$$\Delta P_{ik}^{(n)} = \sum_{j=1}^{j=r} P_{ij}^{(n)} A_{jk}$$

avec

$$\Delta P_{ik}^{(n)} = P_{ik}^{(n+1)} - P_{ik}^{(n)} \quad \text{et} \quad A_{jk} = \begin{cases} p_{jk}, & si \; j \neq k \\ p_{kk} - 1, & si \; j = k \end{cases}$$

montre que $P_{i1}^{(n)}, \ldots, P_{ir}^{(n)}$ sont solutions des équations aux différences finies

$$\Delta x_k^{(n)} = \sum_{j=1}^{j=r} x_j^{(n)} A_{jk}.$$

La théorie classique de ces équations fournit alors, comme l'avait déjà indiqué M. Romanovsky, l'expression générale de $P_{ik}^{(n)}$ en fonction de n sous la forme de combinaisons linéaires et homogènes de r solutions indépendantes de la forme $s_g^{n-1} Q_{gik}(n)$, où $Q_{gik}(n)$ est un polynome en n.

M. von Mises a démontré que si le système des états possibles est indécomposable, chaque probabilité itérée $P_{ik}^{(n)}$ est „asymptotiquement périodique". En utilisant l'expression générale indiquée ci-dessus

$$P_{ik}^{(n)} = \sum_{g} s_g^{n-1} Q_{gik}(n),$$

c'est à dire par une méthode différente de celle de M. von Mises, on arrive[11]) à étendre le théorème de M. von Mises au cas où l'on ne suppose pas que le système des états possibles est indécomposable. On peut exprimer ainsi la proposition obtenue: chaque probabilité itérée $P_{ik}^{(n)}$ est la somme de deux termes: l'un qui a une limite déterminée Π_{ik} quand n croît indéfiniment, l'autre qui se reproduit périodiquement quand on augmente n d'un entier fixe N[10]). Lorsque l'unité est racine simple de $\Delta(s)$, la limite Π_{ik} est indépendante de i; lorsque $\Delta(s)$ n'a pas d'autre racine de module un que l'unité, le second terme disparaît. Une proposition analogue s'énonce pour $\mathfrak{M}\, X_i^{(n)}$.

[10]) Fréchet, loc. cit., p. 94, note [6]).
[11]) Fréchet, loc. cit., p. 94, note [6]).

Bewegung eines gradlinigen Wirbels um eine Buhne.

Abhandlungen zur Hydrodynamik I.

Von *G. Hamel* in Berlin.

Die erste Arbeit einer seit langem geplanten Reihe möge dem verdienstvollen Herausgeber dieser Zeitschrift gewidmet sein.

Es handelt sich um einen Gegenstand, der auch schon in dieser Zeitschrift behandelt worden ist[1]). Also um eine einfache, schon mehrfach behandelte Sache. (Literatur an der unten angeführten Stelle.) Ich werde mich sogar in der Ausführung auf den ersten Fall des Herrn Barth beschränken: Bewegung um eine Halbebene (Buhne), deren Spur die negative Halbachse der komplexen $w = u + i v$-Ebene sei.

Ich empfinde es bei allen mir bekannten Arbeiten über den Gegenstand als störend, weil wirklichkeitsfremd, daß an der scharfen Kante $u = 0$, $v = 0$ der Druck negativ unendlich groß wird. Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, daß man diesem Übelstand abhelfen kann, so ähnlich wie in der Tragflügeltheorie, aber nicht durch Überlagerung einer Zirkulation, was hier nicht geht, sondern durch Überlagerung einer geeigneten gradlinigen Strömung in der Hilfsebene z, wo $w = z^2$ ist. Diese Funktion bildet die längs der negativen reellen Halbachse aufgeschlitzte w-Ebene auf die rechte Halbebene der z-Ebene ab.

Dadurch kann man erreichen, daß die Geschwindigkeit an der Stelle $u = 0$, $v = 0$ endlich bleibt, also auch der Druck; sie konvergiert auch noch für $w \to \infty$ gegen null, allerdings nur wie $\frac{1}{\sqrt{w}}$. Daher wird die Energie des ganzen Feldes unendlich. Doch scheint mir das nicht so bedenklich. Denn es kommt auf den endlichen Bereich an, in dem Wirbel und Buhnenende sich befinden, während die stets vorhandene, hier jedoch vernachlässigte Zähigkeit schon dafür sorgen wird, daß im Unendlichen die Geschwindigkeit stark genug verschwindet und die Energie endlich bleibt.

Vor allem aber fallen die errechneten Wirbelbahnen viel wahrscheinlicher aus als die Bahnen der Herren Barth, Bonder und Neumark.

In der Darstellung setze ich die Arbeiten der genannten Herren und anderer nicht voraus, doch sei auf die wichtigen Arbeiten des Herrn Lagally ausdrücklich hingewiesen.

1. Die allgemeinen Bewegungsgleichungen paralleler Wirbellinien in einer idealen, inkompressibeln Flüssigkeit. In der z-Ebene mögen sich die Spuren von n parallelen Wirbeln der Stärken Γ_ν gerade an den Stellen z_ν befinden. Sonst sei die Bewegung wirbelfrei. Dann heißt das komplexe Potential

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\Gamma_\nu}{2\pi i} \ln(z - z_\nu) + F(z), \qquad (z = x + i y),$$

wo $F(z)$ regulär-analytisch in dem Felde ist. Die Geschwindigkeit ist außerhalb der Wirbel durch

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = f'(z) = \sum_{\nu} \frac{\Gamma_\nu}{2\pi i} \frac{1}{z - z_\nu} + F'(z)$$

gegeben. Für den λ-ten Wirbel aber gilt nach Helmholtz und Lichtenstein[2])

$$\frac{d\bar{z}_\lambda}{dt} = {\sum_{\nu}}' \frac{\Gamma_\nu}{2\pi i} \frac{1}{z_\lambda - z_\nu} + F'(z_\lambda),$$

wo der Strich vor dem Summenzeichen andeutet, daß die Summation über ν den Wert λ ausläßt.

Bei einer konformen Abbildung $z = \varphi(w)$ gilt außerhalb der Wirbel

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{df}{dw} = f'(z) \frac{dz}{dw} = \left\{ \sum_{\nu} \frac{\Gamma_\nu}{2\pi i} \frac{1}{z - z_\nu} + F'(z) \right\} \frac{dz}{dw},$$

aber für den λ-ten Wirbel

$$\frac{d\bar{w}_\lambda}{dt} = \left\{ {\sum}' \frac{\Gamma_\nu}{2\pi i} \frac{1}{z_\lambda - z_\nu} + F'(z_\lambda) \right\} \left(\frac{dz}{dw}\right)_{z = z_\lambda} + \lim_{z \to z_\lambda} \frac{\Gamma_\lambda}{2\pi i} \left[\frac{1}{z - z_\lambda} \frac{dz}{dw} - \frac{1}{w - w_\lambda} \right].$$

---

[1]) Barth: Wirbelbahnen um Wände und Platten unendlich kleiner Wandstärke. Diese Ztschr. 10 (1930). Auch: Bemerkungen zu der Zuschrift der Herren J. Bonder und S. Neumark, M. Z. 34 (1931).

[2]) Lichtenstein: Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik IV. M. Z. 32 (1930). Insbesondere: Zweites Kapitel: Eine Begründung der Helmholtz-Kirchhoffschen Theorie gradliniger Wirbelfäden.

Das Zusatzglied, das manchmal übersehen wird, kommt daher, daß nur das Glied

$$\frac{\Gamma_\lambda}{2\pi i}\frac{1}{w - w_\lambda} \quad \text{für } w \to w_\lambda$$

fortzulassen ist. Elementarer Grenzübergang ergibt für das Zusatzglied $\frac{\Gamma_\lambda}{2\pi i}\frac{\varphi''(w_\lambda)}{2\varphi'(w_\lambda)}$.
Bei der Abbildung $w = z^2$ ist es gleich $-\frac{\Gamma_\lambda}{2\pi i}\frac{1}{4 w_\lambda}$.

2. Ein Wirbel um eine Buhne. Durch die Abbildung $w = z^2$ geht die durch die Spur der Buhne geschlitzte w-Ebene in die rechte z-Halbebene über. Zu dem Wirbel z_1 nehmen wir sein Spiegelbild $-\bar{z}_1$ mit entgegengesetztem Γ hinzu und bekommen nach **1.** in der z-Ebene

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln\frac{z - z_1}{z + \bar{z}_1} - Vzi \qquad (V \text{ reell}).$$

Das Zusatzglied $-Vzi$ gibt in der z-Ebene eine (mögliche) Parallelverschiebung zur y-Achse mit der Geschwindigkeit V. Diese wird so gewählt, daß an der Stelle $z = 0$ die Geschwindigkeit in der z-Ebene null wird. Also

$$f'(0) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left(-\frac{1}{z_1} - \frac{1}{\bar{z}_1}\right) - Vi = 0 \quad \text{oder} \quad V = -\frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{\bar{z}_1}\right) = -\frac{\Gamma}{2\pi}\frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}.$$

Damit wird die Geschwindigkeit in der w-Ebene außerhalb des Wirbels

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{df}{dw} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left[\frac{1}{z - z_1} - \frac{1}{z + \bar{z}_1} + \frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}\right]\frac{1}{2z}$$

(da $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{2z}$ ist) und dies strebt für $z \to 0$ gegen den endlichen reellen Wert

$$\left(\frac{d\bar{w}}{dt}\right)_0 = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{z_1^2 - \bar{z}_1^2}{2(z_1 \bar{z}_1)^2} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{w_1 - \bar{w}_1}{2 w_1 \bar{w}_1} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{v_1}{u_1^2 + v_1^2} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{\sin\vartheta}{r}$$

(r, ϑ die Polarkoordinaten der augenblicklichen Lage des Wirbels). *Ein positiv rotierender Wirbel oberhalb der Buhne* ($\Gamma > 0$, $\sin\vartheta > 0$) *zieht Wasser längs der Buhne nach außen*, was sehr plausibel ist.

Für $z \to \infty$ (oder $w \to \infty$) ist $\frac{d\bar{w}}{dt}$ klein wie $\frac{1}{z}$ oder wie $\frac{1}{\sqrt{w}}$.

Für den Wirbel in der w-Ebene aber ist nach **1.**

$$\frac{d\bar{w}_1}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left[-\frac{1}{z_1 + \bar{z}_1} + \frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}\right]\frac{1}{2z_1} - \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{1}{4 z_1^2}$$

oder wegen $\bar{w}_1 = \bar{z}_1^2$ (also in die z-Ebene rücktransformiert)

$$\frac{d\bar{z}_1}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\left[\frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} - \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1}\right]\frac{1}{4 z_1 \bar{z}_1} - \frac{1}{8 z_1^2 \bar{z}_1}\right\}.$$

Dieses ist die Differentialgleichung für die Bewegung des Wirbels, neben die wir zweckmäßig die konjugierte stellen:

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi i}\left\{\left[\frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} - \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1}\right]\frac{1}{4 z_1 \bar{z}_1} - \frac{1}{8 \bar{z}_1^2 z_1}\right\}.$$

3. Integration der Differentialgleichungen. Summation der beiden Differentialgleichungen gibt

$$\frac{d}{dt}(z_1 + \bar{z}_1) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{z_1 - \bar{z}_1}{8(z_1 \bar{z}_1)^2}.$$

Division der ersten durch $\bar{z}_1$, der zweiten durch z_1 und Addition ergibt

$$\frac{d\ln(z_1 \bar{z}_1)}{dt} = \frac{\Gamma}{2\pi i}\frac{z_1 - \bar{z}_1}{4(z_1 \bar{z}_1)^2}\left[\frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} - \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1}\right].$$

Division dieser beiden Gleichungen und somit Elimination der Zeit ergibt für die Bahnkurven

$$\frac{d\ln(z_1 \bar{z}_1)}{d(z_1 + \bar{z}_1)} = 2\left[\frac{z_1 + \bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} - \frac{1}{z_1 + \bar{z}_1}\right].$$

Diese in $z_1 \bar{z}_1$ lineare Gleichung integriert sich zu

$$z_1 \bar{z}_1 = \frac{1}{2}(z_1 + \bar{z}_1)^2 - \frac{2C}{(z_1 + \bar{z}_1)^2}.$$

Führt man Polarkoordinaten in der w-Ebene ein:

$$w_1 = r\,e^{i\vartheta}, \text{ also } z_1 = \sqrt{w_1} = \sqrt{r}\,e^{i\frac{\vartheta}{2}},$$

so bringt elementare Rechnung die Darstellung der Bahnkurve

$$r^2 = \frac{C}{\cos\vartheta\,(1+\cos\vartheta)}\,.$$

In der z-Ebene ist es die C_4: $x^4 - x^2 y^2 = \frac{1}{2}\,C$, in der w-Ebene ebenfalls eine C_4, nämlich $u^2 v^2 + 2\,C u^2 = C^2$.

4. Diskussion der Wirbelbahnen. Es gibt drei Bahntypen, deren Individuen untereinander ähnlich sind:

a) $C > 0$, mithin auch $\cos\vartheta > 0$, $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Für $\vartheta = 0$ ist $r^2 = \frac{1}{2}\,C$, also $\sqrt{\frac{C}{2}}$ der Abstand, in dem der Wirbel an der Buhne vorbeizieht. Für $\vartheta \to \pm\frac{\pi}{2}$ geht r^2 nach ∞, $(r\cos\vartheta)^2 = u^2 = \frac{C\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta} \to 0$. Die Bahn hat eine vertikale Asymptote durch den Nullpunkt.

b) $C = 0$, $r\cos\vartheta = u = 0$, die Vertikale durch den Nullpunkt ist selbst Bahn.

c) $C < 0$, $\cos\vartheta < 0$, die Bahn bleibt innerhalb der Buhne, d. h. $u < 0$. Für $\vartheta \to \pm\pi$ geht r, gegen ∞, ebenso für $\vartheta \to \pm\frac{\pi}{2}$. Diese Bahnen haben eine vertikale und eine horizontale Asymptote (siehe Abb.).

Was die Bewegung in der Bahn angeht, so kann die erste der Differentialgleichungen in **3.** auch so geschrieben werden:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\Gamma}{16\pi}\,\frac{y}{r^2}\,.$$

Einsetzen von $x = \sqrt{r}\cos\frac{\vartheta}{2}$, $y = \sqrt{r}\sin\frac{\vartheta}{2}$ und des obigen Ergebnisses für r^2 gibt für $C \neq 0$ nach elementarer Rechnung

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi C}\cos^2\vartheta\,(1+\cos\vartheta),$$

was elementar integriert werden könnte. Man ersieht daraus: Ist $\Gamma > 0$, der Wirbel also linksdrehend und $C > 0$, so ist $\dot\vartheta > 0$. Ferner wächst t über alle Grenzen, wenn $\cos\vartheta$ gegen null strebt. Die Wirbel auf der rechten Hälfte der Abb. ($C > 0$) ziehen also bei $\Gamma > 0$ von unten nach oben an der Buhne vorbei.

Bei $C < 0$, also in der linken Hälfte, ist $\dot\vartheta < 0$, die Wirbel ziehen also von links her ebenfalls nach oben, wenn sie sich oberhalb der Buhne befinden $\left(\vartheta > \frac{\pi}{2}\right)$. Dagegen gehen sie unterhalb der Buhne $\left(\vartheta < -\frac{\pi}{2}\right)$ von rechts nach links. Bei negativem Γ kehrt sich natürlich die Sache um. Die Pfeile sind in die Figur für $\Gamma > 0$ eingezeichnet.

Für $C = 0$ ist $y = \pm x$ (+ oben, − unten), $r^2 = 4x^4 = y^4$, also gilt $\frac{dy}{dt} = \pm\frac{\Gamma}{64\pi y^3}$, was sich zu $r^2 = \pm\frac{\Gamma}{4\pi}(t - t_0)$ integriert. Bei $\Gamma > 0$ ziehen die Wirbel auf der Vertikalen von unten nach oben. Bei Annäherung an den Nullpunkt wird die Geschwindigkeit unendlich wie $\frac{1}{r}$.

Für das Quadrat der Geschwindigkeit des Wirbels berechnet sich leicht

$$|\dot w_1|^2 = \frac{\Gamma^2}{64\pi^2 C}\cdot\cos\vartheta\,(1 + 3\cos\vartheta + 4\cos^2\vartheta); \quad (C \neq 0),$$

die Geschwindigkeit strebt also für $C > 0$ im Unendlichen ($\cos\vartheta \to 0$) gegen null wie $\frac{1}{r}$, für $\cos\vartheta = 1$, $C > 0$ ist sie $\frac{\Gamma}{\pi\sqrt{8C}}$, für $C < 0$ und $\cos\vartheta \to -1$ ist sie $\frac{\Gamma}{\pi\sqrt{-32\,C}}$.

5. Bemerkung über die beiderseitig begrenzte Platte und das Tor. Bildet man die durch die Platte geschlitzte w-Ebene auf das Äußere eines Kreises der z-Ebene ab, so kann man bei einem Wirbel durch Überlagerung einer Parallelströmung an einem Ende der Platte endliche Geschwindigkeit erreichen. Allerdings wird jetzt die Geschwindigkeit im Unendlichen nicht null. Immerhin wird man, wenn ein Wirbel nahe an einem Ende der Platte vorbeistreicht, so für die nächste Umgebung von Wirbel und Plattenende eine brauchbare Lösung bekommen. Ich habe die Rechnung durchgeführt, will sie aber nicht veröffentlichen.

Man könnte vielleicht denken, nach Joukowskischer Methode durch Überlagerung eines Wirbels $\frac{\Gamma_1}{2\pi i}\ln z$ an einem Plattenende endliche Geschwindigkeit zu erreichen. Formal geht das. Aber Γ_1 wird von der Lage des Wirbels abhängig, mithin das Potential φ, das nicht eindeutig ist, von t abhängen, mithin das in der Bernoullischen Gleichung auftretende $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ vieldeutig sein und also auch der Druck p, was nicht zulässig ist. Man wird also von dieser Idee absehen müssen.

Wohl läßt sich bei einem symmetrischen Wirbelpaar durch Überlagerung einer gleichförmigen Strömung an beiden Enden endliche Geschwindigkeit erreichen. Auch diese Rechnung, die ich durchgeführt habe, scheint mir nicht der Veröffentlichung wert.

Etwas mehr Interesse hat vielleicht das Problem des Tores: ein symmetrisches Wirbelpaar tritt durch ein Tor (Strecke von $w=-1$ bis zu $w=+1$) von einer Halbebene in die andere. Hier läßt sich durch Überlagerung endliche Geschwindigkeit an den Kanten $w=\pm 1$ erreichen und die Geschwindigkeit wird im Unendlichen klein wie $\frac{1}{\sqrt{w}}$. M 13

Zur mathematischen Begründung der statistischen Mechanik.

Von *A. Khintchine* in Moskau.

Mathematisches Institut an der Universität Moskau.

1. Einleitung. Für die mathematische Begründung der klassischen statistischen Mechanik erschien als Zentralfrage das sogenannte Ergodenproblem — die Frage danach, in welchen Fällen das Zeitmittel einer mechanischen Größe ihrem „Phasenmittel“ gleichgesetzt werden darf. Man pflegte diese Identifizierung, die für den weiteren Aufbau der physikalischen Statistik unbedingt notwendig schien, auf verschiedene „Ergoden-“ und „Quasiergodenhypothesen“ zurückzuführen; bisweilen bezeichnete man auch das Postulat „Zeitmittel = Phasenmittel“ selbst als „Quasiergodenhypothese“. Durch diese und ähnliche Annahmen konnte man die Bedürfnisse der physikalischen Theorie einigermaßen befriedigen; das mathematische Problem war aber dadurch selbstverständlich nicht aufgehoben und trotzte nach wie vor allen Angriffen, bis Ende 1931 Birkhoff[1]) mittels einer höchst eleganten mathematischen Konstruktion eine für die ersten Zwecke erschöpfende Lösung desselben fand. Dieser grundlegende Erfolg, auf den die Wissenschaft viele Jahre gewartet hat, schien aber manchem Fachgenossen zu spät in die Welt gekommen; und in der Tat hat die physikalische Statistik inzwischen ganz neue Wege genommen, indem erstens die kontinuierliche Ausbreitung der Zustandsvariablen und zweitens die deterministischen Voraussetzungen der klassischen Theorie mehr und mehr in den Hintergrund traten und heutzutage, abgesehen von ihrer historischen Bedeutung, wohl nur als Annäherungsansätze in gewissen Spezialfällen benutzt werden können.

Der Mathematiker ist aber überzeugt, daß eine schöne Schöpfung seiner Wissenschaft — ein Erfolg, um den sie jahrelang gerungen hat — nie zu spät in die Welt kommt. Die von Birkhoff entdeckte Gesetzmäßigkeit reicht, wie ich hier zu zeigen beabsichtige, über die ihr von ihrem Verfasser gegebene Verkörperung weit hinaus und erweist sich als bedeutungsvoll auch für den gegenwärtigen Standpunkt der physikalischen Statistik. Ich konnte vor kurzem beweisen[2]), daß die analytischen Voraussetzungen des Birkhoffschen Satzes für seine Begründung ganz unwesentlich sind. Hier soll gezeigt werden, daß diesem Satz eine rein wahrscheinlichkeitstheoretische Fassung gegeben werden kann, in der weder von Determinismus, noch von kontinuierlicher Kennzeichnung der Zustände mehr die Rede ist. In einem letzten Abschnitt soll dann die Bedeutung dieses Satzes für die physikalische Statistik besprochen werden.

2. Wahrscheinlichkeitstheoretische Fassung des Birkhoffschen Satzes. Der Einfachheit halber betrachte ich ein physikalisches System, das nur zweier Zustände A und B fähig ist; unter diesen Zuständen können sowohl zwei komplementäre Teile des dem System zugäng-

[1]) Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 17, 650—660 (1931).
[2]) Math. Ann. 107, 485 (1932).

lichen klassischen Phasenraumteils als auch zwei komplementäre Mengen von diskreten Quantenzuständen oder auch allgemeinere Disjunktionen gedacht werden — das ist für die folgende Betrachtung ganz belanglos. Wir nehmen nur an, daß der jeweilige Zustand des Systems nach Abschluß eines bestimmten Zeitintervalls immer wieder registriert wird; die zufällige Variable x_k habe den Wert 1 oder 0, je nachdem das System sich bei der k-ten Registrierung ($-\infty < k < \infty$) im Zustand A oder im Zustand B befindet. Die Beschreibung des vollständigen Lebenslaufs eines Systems geschieht durch Angabe der Werte aller zugehörigen x_k ($-\infty < k < \infty$), hat also die Gestalt einer in beiden Richtungen unendlichen Reihe, aus Einsen und Nullen bestehend. Deshalb will ich eine derartige Reihe als Einzelfall bezeichnen.

Nun kann jede mögliche Aussage über das Verhalten des Systems als der Inbegriff aller Einzelfälle aufgefaßt werden, welche dieser Aussage genügen; so ist z. B. die Aussage „$x_3 = 1$“ dem Inbegriff aller Einzelfälle äquivalent, in denen $x_3 = 1$ ist. Oder: die Aussage „das System befindet sich unendlich oft im Zustand B“ ist dem Inbegriff aller Einzelfälle äquivalent, in denen die Null unendlich oft vorkommt, usw. Jede Menge von Einzelfällen wollen wir kurz einen Fall nennen, und können somit sagen, daß jede über das Verhalten des Systems aufgestellte Bedingung einen bestimmten Fall bedeutet.

Ist nun jedem Fall der Form $(x_{i_1} = a_{i_1}, x_{i_2} = a_{i_2}, \ldots, x_{i_k} = a_{i_k})$, also jeder Aussage über die Werte einer beliebigen endlichen Anzahl der x_i eine bestimmte Wahrscheinlichkeit zugeordnet, so ist nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung auch für gewisse Fälle komplizierterer Art die zugehörige Wahrscheinlichkeit definiert (so z. B. für die Fälle „von den Zahlen x_1 bis x_{100} sind wenigstens 20 gleich 1“, „unter den Zahlen x_i sind unendlich viele gleich 0“, u. dgl. m.).

Die einzige allgemeine Bedingung, der wir das Verhalten des Systems unterwerfen wollen, ist die zeitliche Homogenität. Dies soll folgendes bedeuten. Ist $x_i = a_i$ ($-\infty < i < \infty$) ein bestimmter Einzelfall f, so soll $T_r f$ den Einzelfall $x_i = a_{i+r}$ ($-\infty < i < \infty$) bezeichnen, wobei r eine beliebige feste ganze Zahl ist. Ist F ein Fall (Menge von Einzelfällen), so soll $T_r F$ den Inbegriff aller Einzelfälle $T_r f$ bedeuten, für die $f \subset F$ ist. Der Übergang von F zu $T_r F$ bedeutet also lediglich eine Translation des Zeitanfangspunktes. Das System soll zeitlich homogen heißen, wenn für jeden Fall F, der eine bestimmte Wahrscheinlichkeit $W(F)$ besitzt, und für jedes r $W(T_r F) = W(F)$ ist.

Nun setzen wir $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = h_n$ und bezeichnen mit H den Fall, der durch die Bedingung „$\lim\limits_{n\to\infty} h_n$ existiert“ charakterisiert wird. Dann läßt sich das wahrscheinlichkeitstheoretische Analogon des Birkhoffschen Satzes folgendermaßen aussprechen:

Für jedes zeitlich homogene System ist $W(H) = 1$.

Der Beweis verläuft demjenigen der ersten Verallgemeinerung (vgl. [2]) völlig analog und soll deswegen kurz gehalten werden. Zunächst bezeichne ich mit $W_i(\alpha, \beta)$ ($\alpha < \beta$, $1 \leq i < \infty$) die Wahrscheinlichkeit des Falls „es gibt zwei natürliche Zahlen $p > i$, $q > i$, so daß $h_p < \alpha$, $h_q > \beta$ wird“. Ist für alle α, β ($\alpha < \beta$) $\lim\limits_{i\to\infty} W_i(\alpha, \beta) = 0$, so setze man $\alpha_k = \frac{k-1}{n}$, $\beta_k = \frac{k}{n}$ ($n > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$). Da bei festem n nach Voraussetzung $\lim\limits_{i\to\infty}\sum_{k=1}^{n} W_i(\alpha_k, \beta_k) = 0$ ist, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß für alle $p > i$, $q > i$, $|h_p - h_q| \leq \frac{2}{n}$ wird, bei genügend großem i beliebig nahe an 1; und da n beliebig groß gewählt werden kann, ist damit der Satz bewiesen.

Wir dürfen demnach voraussetzen, daß es zwei Zahlen α, β ($\alpha < \beta$) gibt von der Beschaffenheit, daß

$$\lim_{i\to\infty} W_i(\alpha, \beta) = \xi > 0$$

ist. Nun sei $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$; bezeichnen wir mit K den Fall $\lim\sup h_n > \beta'$, $\lim\inf h_n < \alpha'$, so ist a fortiori $W(K) \geq \xi > 0$. Bedeutet nun allgemein $E_F(x)$ den Erwartungswert der Größe x im Fall F, so wollen wir aus der gefällten Annahme einen Widerspruch herleiten, indem wir $E_K(x_1)$ abschätzen.

K_s bedeute den Fall „K ist realisiert und s ist die kleinste Zahl, für die $h_s > \beta'$ ausfällt“. Offenbar ist $K = \sum_{s=1}^{\infty} K_s$, und die Fälle K_s, K_t ($s \neq t$) schließen einander aus. Ferner überzeugt man sich leicht, daß für jedes ganze r $T_r K_s$ einen Unterfall von K bildet, was wir durch $T_r K_s \subset K$ ausdrücken wollen. Genauer ist leicht einzusehen, daß für $0 < r < s$ und für jeden Einzelfall f aus $f \subset T_r K_s$ notwendig $f \subset K_{s'}$ ($s' < s$ geeignet gewählt) folgt.

Nun sei $K_l^* (1 \leqq l < s)$ der Fall: „K_l ist realisiert, aber kein $T_r K_j (l < j \leqq s,\ 0 \leqq r < j)$ ist erfüllt", und K_s^* bedeute dasselbe wie K_s. Die Gruppe der Fälle $T_r K_l^* (1 \leqq l \leqq s,\ 0 \leqq r \leqq l-1)$ besitzt dann folgende Eigenschaften:

1. $\sum_{r,l} T_r K_l^* = \sum_{j=1}^{s} K_j = L_s$, 2. $W(T_r K_l^*) = W(K_l^*)$,

3. $T_r K_l^*$ und $T_{r'} K_{l'}^*$ sind nur im Fall $r = r'$, $l = l'$ miteinander verträglich.

1. und 2. sind evident; 3. wird leicht ganz wie in [1]) oder [2]) bewiesen.

Folglich erhält man $W(L_s)\, E_{L_s}(x_1) = \sum_{r,l} W(T_r K_l^*)\, E_{T_r K^*_l}(x_1)$,

oder wegen $E_{T_r F}(x_1) = E_F(x_{r+1})$:

$$W(L_s)\, E_{L_s}(x_1) = \sum_{l=1}^{s} W(K_l^*)\, E_{K^*_l}(x_1 + \ldots + x_l) > \sum_{l=1}^{s} W(K_l^*)\, l\beta' = \beta' \sum_{l=1}^{s} \sum_{r=0}^{l-1} W(T_r K_l^*) = \beta' W(L_s),$$

und folglich im Limes für $s \to \infty$: $W(K)\, E_K(x_1) \geqq \beta' W(K)$, oder wegen $W(K) > 0$: $E_K(x_1) > \beta'$. Nun läßt sich aber evidenterweise durch einen völlig analogen Schluß $E_K(x_1) < \alpha'$ beweisen, womit der gewünschte Widerspruch erbracht ist.

Offenbar kann der bewiesene Satz mannigfaltig verallgemeinert werden, vor allem auf Systeme, die einer beliebigen Menge von Zuständen fähig sind.

3. Diskussion. Der vorstehende Satz belegt die Existenz der Zeitmittel für zeitlich homogene Systeme. Um zu erkennen, unter welchen Umständen diese Zeitmittel mit den entsprechenden Phasenmitteln zusammenfallen ($\lim h_n = W(A)$), muß man nach Birkhoff den Begriff der „starken Transitivität" einführen, der auch in der wahrscheinlichkeitstheoretischen Fassung einen einfachen und präzisen Sinn erhält. Nennen wir nämlich einen Fall F (zeitlich) invariant, wenn für jedes $r\ (-\infty < r < \infty)\ T_r F = F$ ist, so enthält die starke Transitivität die Forderung, daß kein invarianter Fall eine von 0 und 1 verschiedene Wahrscheinlichkeit haben könne. Ist dem so, so ist, wie man sofort einsieht,

$$W\{\lim_{n \to \infty} h_n = W(A)\} = 1,$$

was den eigentlichen Inhalt des „Ergodensatzes" ausmacht.

Nun entsteht sachgemäß die Frage, welche Bedeutung der wahrscheinlichkeitstheoretisch gefaßte Birkhoffsche Satz für die Begründung der gegenwärtigen physikalischen Statistik haben kann, wo doch alles Grundsätzliche allem Anschein nach schon genügend mathematisch begründet ist, vor allem durch die mannigfachen Schöpfungen des Mannes, zu dessen Ehren dieses Heft erscheint?

Den hauptsächlichen prinzipiellen Unterschied, der zwischen der v. Misesschen und der Birkhoffschen Begründungsart[3]) besteht, muß man, wie ich glaube, darin erblicken, daß die zeitliche Folge der Beobachtungen bei v. Mises als eine Markoffsche Kette (Erblichkeitsfall, cas d'hérédité nach G. Pólya) auftritt, in welcher das Verteilungsgesetz jedes Gliedes durch den Wert des unmittelbar vorangehenden derart bestimmt ist, daß keine Kenntnis über die Vorgeschichte des Systems an diesem Verteilungsgesetz etwas ändern kann. Diese Voraussetzung erleichtert die Untersuchung sehr wesentlich und ist deshalb in allen den Fällen erwünscht, wo sie aus prinzipiellen Gründen zulässig erscheint. Demgegenüber fußt die andere Theorie auf wesentlich allgemeineren Voraussetzungen, indem sie der Wirkung der Vorgeschichte vollständige Rechnung trägt. Man könnte, wie es sonst üblich ist, die v. Misessche Betrachtungsweise dadurch zu verallgemeinern suchen, daß man in den Begriff des „gegenwärtigen Zustands" so viele Parameter einführt, als es für eine genügende Kennzeichnung der Vorgeschichte des Systems nötig ist. Eine leichte Überlegung zeigt aber, daß dieser Kunstgriff hier kaum möglich ist. Denn seine folgerichtige Durchführung würde ja fordern, das ganze Wertsystem $x_0, x_{-1}, \ldots x_{-n}, \ldots$ als „gegenwärtigen Zustand" zusammenzufassen; und abgesehen davon, daß ein solcher „Zustand" in der Regel eine verschwindende Wahrscheinlichkeit haben müßte, wären bei dieser Auffassung die Übergangsmöglichkeiten der v. Misesschen Theorie aufs engste beschränkt, so daß die Ergebnisse wohl kaum haltbar bleiben könnten.

Ich glaube, daß die wirkliche Sachlage die folgende ist: in der v. Misesschen Theorie müssen wir ein vollendetes Meisterwerk erblicken, das überall mit Erfolg angewandt werden kann, wo der Vorgang als eine Markoffsche Kette aufgefaßt werden darf. Für den allgemeinen Fall bildet aber der Birkhoffsche Satz in seiner hier dargelegten wahrscheinlichkeitstheoretischen Fassung den Ausgangspunkt einer neuen umfassenderen Theorie, deren Förderung dem Mathematiker für die nächste Zeit ein fruchtbares Untersuchungsfeld bieten wird. M 6

[3]) Dabei sehe ich davon gänzlich ab, daß die v. Misessche Theorie gegenwärtig ein im wesentlichen vollendetes Werk darstellt, während der Birkhoffsche Satz nur einen ersten Baustein einer künftigen Theorie bildet.

Ausbreitung von örtlichen Störungen in strömenden Gasen.

Von *K. Körner* in Prag.

Anschließend an den kurzen Bericht[1]), den ich anläßlich der 125-Jahrfeier der deutschen technischen Hochschule in Prag gegeben habe und der die Ausbreitung von Störungen im Strome von zylindrischen Gasleitungen veranschaulichen sollte, sollen im folgenden auch andere Strömungen, die durch eine Lagenkoordinate gegeben sind, in entsprechender Weise behandelt werden.

Ist die Leitung z. B. kegelförmig, so entstehen durch eine Störung an einer Öffnung an der Spitze Kugelwellen im Innern des Rohres, dasselbe geschieht auch angenähert, wenn beim Ausströmen aus einer kleinen Öffnung in der ebenen Wand eines Gefäßes dort eine Störung auftritt.

Bezeichnet x die Entfernung des betrachteten Punkts von der Kugelspitze oder dem Mittelpunkt der Ausflußöffnung, so ist die Bewegungsgleichung bei gebräuchlichen Bezeichnungen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varrho}\left(\frac{d p}{d \varrho}\right)\frac{\partial \varrho}{\partial x} = 0$$

und die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + \frac{2 u \varrho}{x} = 0,$$

dazu kommt bei adiabatischer Zustandsänderung noch die Wärmegleichung: $\frac{p}{\varrho^{\varkappa}} = c$.

Durch Vereinigung der ersten und dritten Gleichung findet man die Energiegleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\varrho}\right) = 0.$$

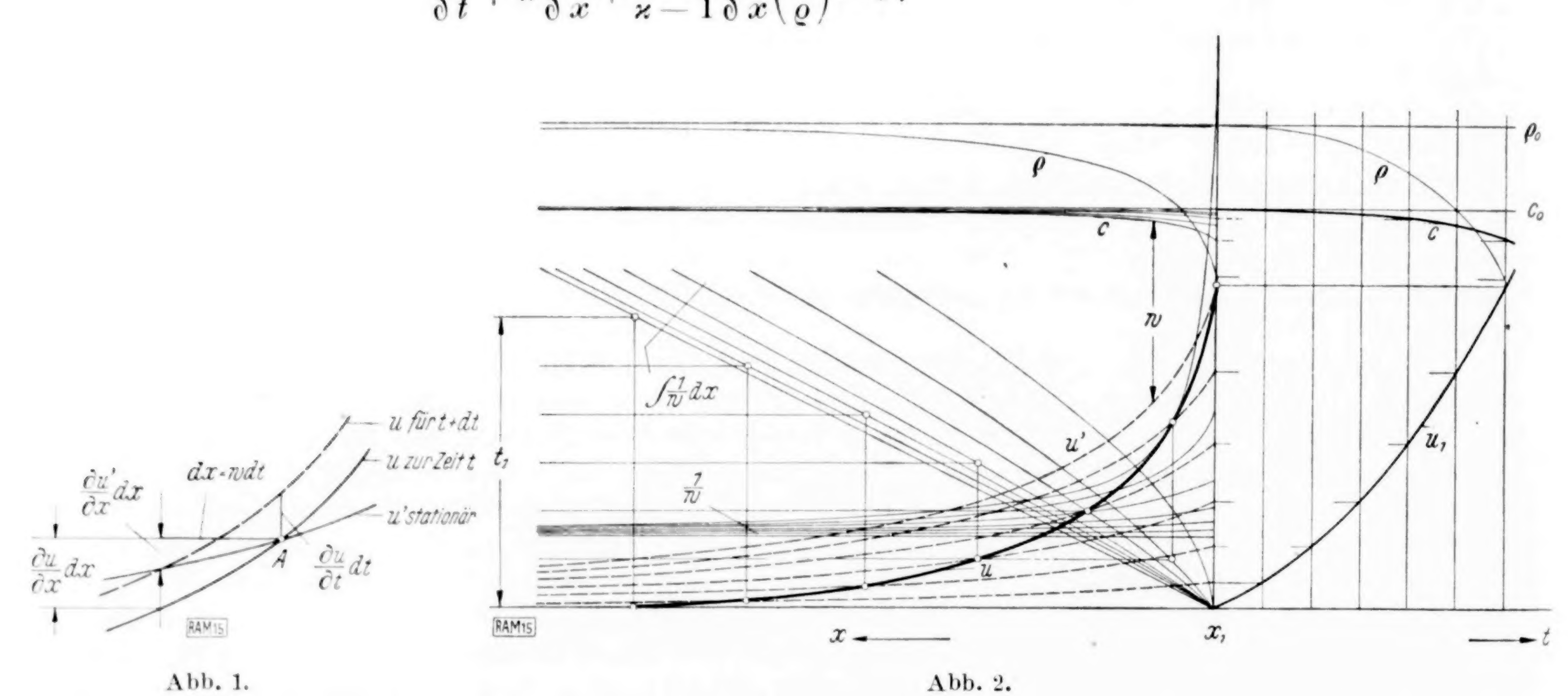


Abb. 1. Abb. 2.

Denkt man sich den Verlauf von u und ϱ längs x zur Zeit t bekannt und in einer Abbildung (1) verzeichnet, so kann man, von einem Punkt A dieser Linie ausgehend, finden:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial x}\right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} = w\left(\frac{\partial \varrho}{\partial x} - \frac{\partial \varrho'}{\partial x}\right),$$

worin die Werte $\frac{\partial u'}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varrho'}{\partial x}$ sich auf die störungslose, stationäre Bewegung beziehen und w die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Störung von u und ϱ bedeutet. Sie ist jeweilig die Differenz der Schallgeschwindigkeit und der Eigengeschwindigkeit des Teilchens, also $w = c - u$, worin wieder bei adiabatischer Zustandsänderung in der Schwingung $c = \sqrt{\frac{d p}{d \varrho}} = \sqrt{\varkappa \frac{p}{\varrho}}$ ist. Man superponiert so auf die stationäre Strömung, die dem augenblicklichen Zustand an der betrachteten Stelle entsprechen würde, die Störung in dem ihr zukommenden Verlauf.

[1]) Festheft der H.D.J-Mitteilungen, Brünn, 1931. Heft 21/22, S. 465.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist so definiert, daß nach dem Zeitteilchen dt, wo im Punkt A z. B. die Änderung $\frac{\partial u}{\partial t}\,dt$ stattgefunden hat, die Störung der stationären Bewegung in der Entfernung $w\,dt$ eben beginnt.

Setzt man diese Werte in obige Gleichungen ein, so erhält man:

$$c\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{c^2}{\varrho}\frac{\partial \varrho}{\partial x}-(c-u)\frac{\partial u'}{\partial x}=0 \qquad c\frac{\partial \varrho}{\partial x}+\varrho\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{2u\varrho}{x}-(c-u)\frac{\partial \varrho'}{\partial x}=0$$

$$c\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\varkappa-1}\frac{\partial (c^2)}{\partial x}-(c-u)\frac{\partial u'}{\partial x}=0, \quad \text{woraus auch folgt:} \quad \varrho\frac{\partial u'}{\partial x}-c\frac{\partial \varrho'}{\partial x}=-\frac{2u\varrho c}{x(c-u)}.$$

Nun ist die stationäre Bewegung bestimmt durch:

$$u\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{c^2}{\varrho}\cdot\frac{\partial \varrho'}{\partial x}=0, \qquad u\frac{\partial \varrho'}{\partial x}+\varrho\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{2u\varrho}{x}=0 \quad \text{oder:} \quad u\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{\varkappa-1}\frac{\partial (c^2)'}{\partial x}=0,$$

hiernach wird:

$$\frac{\partial u'}{\partial x}=-\frac{2uc^2}{x(c^2-u^2)}, \quad \frac{\partial \varrho'}{\partial x}=\frac{2u\varrho}{x(c^2-u^2)} \quad \text{und} \quad \left(\frac{\partial u'}{\partial \varrho'}\right)_t=-\frac{c^2}{u\varrho}, \quad \text{ferner:} \quad c^2=c_0{}^2-\frac{\varkappa-1}{2}u^2,$$

wenn für $u=0$ auch $c=c_0$ gesetzt wird. Die Eulerschen Gleichungen gehen damit über in:

$$\varrho\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial \varrho}{\partial x}=-\frac{2uc\varrho}{x(c+u)}, \quad \text{die Energiegleichung in:} \quad c\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\varkappa-1}\cdot\frac{\partial (c^2)}{\partial x}=-\frac{2uc^2}{x(c+u)}.$$

Sie ergeben die Wärmegleichung in der Form: $c^2=\varkappa\, c\,\varrho^{\varkappa-1}$.

Diese Gleichungen lassen sich nun zeichnerisch integrieren, indem man z. B. bei beliebig gegebenem zeitlichen Verlauf von u an der Störungsstelle x_1 den entsprechenden Verlauf von c_1 und ϱ_1 mittels der Beziehungen:

$$c_1{}^2=c_0{}^2-\frac{\varkappa-1}{2}u_1{}^2 \quad \text{und} \quad c_1{}^2=\varkappa\, c\,\varrho_1{}^{\varkappa-1}=c_0{}^2\left(\frac{\varrho_1}{\varrho_0}\right)^{\varkappa-1}$$

errechnet und von den der Zeit t entsprechenden Werten aus die Linien des örtlichen Verlaufs von u, c und ϱ für stationäre Strömung verzeichnet (Abb. 2).

Durch Integration der Gleichungen für $\frac{\partial u'}{\partial x}$ und $\frac{\partial \varrho'}{\partial x}$ ergibt sich nämlich:

$$x^2 u\left(c_0{}^2-\frac{\varkappa-1}{2}u^2\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}=x_1{}^2 u_1\left(c_0{}^2-\frac{\varkappa-1}{2}u_1{}^2\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}}$$

und daraus unmittelbar u als Funktion von x, womit sich dann auch c^2 und ϱ aus obigen Gleichungen in Abhängigkeit von x ergeben.

Die sogenannte kritische Austrittsgeschwindigkeit ergibt für $c=u$ die bekannten Beziehungen:

$$\frac{\varrho_k}{\varrho_0}=\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{\varkappa-1}} \quad \text{und} \quad \frac{p_k}{p_0}=\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}}.$$

Mit den gefundenen Werten von c und u an jeder Stelle x kann man auch $w=c-u$ und mit $dt=\frac{1}{w}\,dx$ auch $t_1-t=\int\limits_{x_1}^{x}\frac{1}{w}\,dx$ als Abhängige von x verzeichnen, d. h. die Zeit, in der vom Ausgangswert an der Störungstelle x_1 aus die Ausbreitung bis zur Stelle x gelangt ist. Führt man diese Rechnung für eine Anzahl von Werten t aus, so gelangt man zum örtlichen Verlauf aller Zustandsgrößen zur Zeit t_1 (Abb. 2).

In ganz gleicher Weise läßt sich die zylindrische Ausbreitung für einen engen Schlitz in ebener Wand oder eine Öffnung an der Spitze eines Keiles behandeln. Die Kontinuitätsgleichung wird hier:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\varrho\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \varrho}{\partial x}+\frac{\varrho u}{x}=0 \quad \text{oder:} \quad \varrho\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial \varrho}{\partial x}=-\frac{uc\varrho}{x(c+u)}.$$

Ebenso ergibt sich für wulstförmige Ausbreitung von einem engen Schlitz am Umfang eines Zylinders vom Halbmesser r nach außen hin die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t}+\varrho\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \varrho}{\partial x}+\frac{\pi r+4x}{x(\pi r+2x)}\cdot\varrho u=0 \quad \text{oder:} \quad \varrho\frac{\partial u}{\partial x}+c\frac{\partial \varrho}{\partial x}=-\frac{\pi r+4x}{x(\pi r+2x)}\cdot\frac{uc\varrho}{c+u}.$$

Thermodynamische Schwankungen.

Vortrag gehalten vor der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft am 11. Januar 1933.

Von *M. v. Laue* in Berlin.

Unter einem Naturgesetz versteht man eine Regel, welche für alle darunter fallenden Vorgänge streng, schlechthin unverbrüchlich gültig ist; die geringste Abweichung von ihr, wenn sie sich mit Sicherheit feststellen ließe, würde ihr den Rang als Naturgesetz nehmen. So haben es die Naturwissenschaftler und Philosophen von alters her aufgefaßt; und ich möchte meinen, daß es auch in Zukunft dabei sein Bewenden haben dürfte, trotzdem zurzeit manchmal andere Meinungen laut werden.

Solche Gesetze kennt die Physik in großer Zahl. Denken Sie, um mit den einfachsten mechanischen Vorgängen anzufangen, an den Fall schwerer Körper, an die Planetenbewegung, an die elastischen Schwingungen einer Saite — oder in der Elektrodynamik an die Coulombsche Anziehung elektrischer Ladungen, an die Induktion von Strömen durch das Magnetfeld, an die Abscheidung gelöster Metalle bei der Elektrolyse — oder in der Optik an die Fortpflanzung des Lichts, an Interferenz und Beugung, Spiegelung und Brechung. — Alles dies unterliegt Naturgesetzen von unbedingter Gültigkeit.

Die Vorgänge, die wir bisher erwähnten, haben alle die Eigentümlichkeit gemeinsam, umkehrbar zu sein. Nach der Alltagserfahrung freilich fällt der Stein nicht nach oben, und das Wasser fließt nicht den Berg hinauf. Aber bei diesen Geschehnissen spielen schon thermische Erscheinungen mit; sie sind nicht rein mechanisch. Etwas von der Umkehrbarkeit zeigt schon der Wurf eines Steins, bei dem dieser zunächst nach oben fliegt, oder jeder Springbrunnen. Und die Umkehrbarkeit tritt um so vollkommener vor Augen, je mehr wir Reibung ausschließen. Das großartigste Beispiel für einen fast reibungslosen, mechanischen Vorgang bietet die Planetenbewegung. Freilich kann niemand die Geschwindigkeit der Planeten umdrehen; aber die Tatsache, daß sich nach Jahrtausenden immer wieder dieselbe Konstellation aller Planeten ergibt, beweist doch auf das deutlichste, daß bleibende Änderungen des Planetensystems mit der Bewegung nicht verbunden sind. Auch für die elektrodynamischen und optischen Vorgänge gilt die Umkehrbarkeit, solange sie nicht von thermischen Erscheinungen begleitet sind. Man kann z. B. im leeren Raum einen Lichtstrahl beliebig oft denselben Weg hin und her schicken, indem man ihn am Ende jeder Wegstrecke mit einem vollkommenen Spiegel zurückwirft.

Im Gegensatz dazu sind für die Wärmelehre unumkehrbare Vorgänge kennzeichnend. Schon der alltägliche Prozeß, der uns auf den Temperaturbegriff geführt hat, daß nämlich ein wärmerer und ein kälterer Körper, sobald man sie zur Berührung bringt, ihre Temperaturen ausgleichen, ist ein typisches Beispiel dafür. Niemand hat je gesehen, daß sich danach wieder freiwillig Temperaturunterschiede ausbilden. Gewiß, man kann den alten Zustand der beiden Körper wiederherstellen, indem man den einen Körper in ein warmes, den anderen in ein kaltes Wasserbad bringt. Aber dann hat sich das wärmere etwas abgekühlt, das kältere etwas erwärmt, so daß für alle an unserem Versuch beteiligten Körper der Anfangszustand nicht erreicht ist. Und er läßt sich tatsächlich durch kein noch so scharfsinnig ersonnenes Verfahren wiederherstellen, ohne daß an irgendwelchen anderen Körpern dafür eine dauernde Änderung zu finden ist.

Nicht alle unumkehrbaren Vorgänge sind mit Temperaturänderung verbunden. Denken Sie einmal zwei Gefäße mittels eines engen, durch einen Hahn verschließbaren Rohres verbunden. Zunächst sei der Hahn geschlossen, im ersten Gefäß ein ideales Gas, während das andere leergepumpt ist. Bei Öffnung des Hahns strömt sofort Gas in das leere, und nach praktisch recht kurzer Zeit ist die Gasdichte in beiden Gefäßen die gleiche. Die Temperatur bleibt dabei ziemlich unverändert. Auch hier hat niemand jemals die Umkehrung gesehen, daß sich das Gas freiwillig aus dem einen Gefäß ganz in das andere zurückzieht. Selbstverständlich können wir es mit einer Pumpe wieder zurück überführen. Aber dazu müssen wir mechanische Energie aufwenden, und finden deren Äquivalent in einer Temperaturerhöhung des Gases. Um diese zu beseitigen und somit das Gas auf den alten Zustand zurückzubringen, müssen wir die Wärme auf ein kühleres Wärmebad ableiten. Dies also verändert dabei notwendig seinen Zustand. Das Endergebnis ist die Überführung von mechanischer Arbeit in Wärme, eine dauernde, nicht vollständig rückgängig zu machende Änderung. Gewiß kann man auch aus Wärme Arbeit gewinnen — das tut ja jede Dampfmaschine. Aber wenn von der Wärme, welche dem Dampfkessel entzogen wird, ein Teil die Maschine treibt, so muß ein anderer Teil mit dem abströmenden Dampfe wandern und wird bei dessen Kondensation an einen Wärmebehälter tieferer Temperatur abgegeben. Es bleibt also, wenn einmal mechanische Energie in Wärme umgesetzt ist, eine dauernde Änderung, in diesem Fall ein teilweiser Temperaturausgleich zwischen zwei Wärmebehältern, zurück.

Dieselbe Umwandlung ist nun das Wesen jeder Reibungserscheinung. Ob ein Rad auf reibender Unterlage rollt, oder ob ein Festkörper in einer reibenden Flüssigkeit allmählich zur Ruhe kommt, immer vernichtet die Reibung mechanische und schafft thermische Energie, deren Gleichwertigkeit der Quantität nach ja durch das Energieprinzip gewährleistet wird. Aber dieses Gesetz, das übrigens ganz zum Typus der strengen Naturgesetze gehört, sagt nichts über die Richtung der möglichen Umwandlung. Für diese Frage ist vielmehr das von Rudolf Clausius in der Mitte des 19. Jahrhunderts aufgestellte Entropieprinzip, der sogenannte zweite Hauptsatz der Thermodynamik, maßgebend. Es behauptet von einer durch den Zustand des Körpers (also bei einem Gas oder Flüssigkeit etwa durch Druck und Temperatur) vollständig bestimmten Größe, der Entropie, daß sie bei jedem Naturvorgange zunimmt, vielleicht einmal unverändert bleibt. Sie nimmt aber nie ab. Nimmt sie zu, so ist der betreffende Vorgang unumkehrbar, weil eben die Umkehrung Entropie-Abnahme bedingte. Nur wenn sie konstant bleibt, ist die Umkehrung des Vorganges möglich.

Bisher werden meine Hörer in dem Unterschiede zwischen umkehrbaren und unumkehrbaren Vorgängen wohl noch keine logische Schwierigkeit sehen. Warum soll es nicht beide Arten von Vorgängen in der Natur nebeneinander geben? Aber die große Frage nach der Verträglichkeit beider Arten erhebt sich mit der Molekulartheorie. Wir sind heute, da wir die Bahnen einzelner molekularer Teilchen, wie Elektronen oder Alphateilchen in der Wilsonkammer unmittelbar sehen und photographieren können, da wir das Auftreffen des einzelnen Alphateilchens auf den Leuchtschirm als Lichtblitz wahrnehmen, vom Dasein der Atome und Molekeln felsenfest überzeugt. Die Molekulartheorie aber führt die Wärme auf Bewegung der Moleküle zurück, und auch für die Richtigkeit dieser Anschauung haben wir neben vielen älteren, mittelbaren Beweisen die unmittelbare Bestätigung durch das Verdienst von O. Stern, der die Geschwindigkeit der Gasmolekeln in Abhängigkeit von der Temperatur maß[1]). Wenn somit der Vorgang am einzelnen Molekül, aber auch bei der Wechselwirkung von zwei oder einigen Molekülen, ein rein mechanischer, folglich umkehrbarer ist, wie verträgt sich damit die Unumkehrbarkeit der thermischen Vorgänge, wie sie das Entropieprinzip behauptet?

Diese Frage bildete in den letzten Jahrzehnten des vorigen Jahrhunderts ein schwieriges Problem. Es gelöst zu haben ist das Verdienst von Ludwig Boltzmann, des 1906 verstorbenen Wiener Physikers. Die Lösung beruht auf der überaus großen Zahl der Molekeln, die einen einigermaßen großen Körper bilden — und nur an solchen Körpern sind die dem zweiten Hauptsatz zugrunde liegenden Erfahrungen gemacht. Sie müssen bedenken, daß zwei Gramm Wasserstoff, 4 Gramm Helium, allgemeiner die Zahl von Grammen eines Körpers, welche seinem Molekulargewicht entspricht, aus $6{,}06 \cdot 10^{23}$ Molekeln bestehen. In einem Tausendstel Milligramm hat man also immer noch, je nach dem Stoff, 10^{15} bis 10^{17} Molekeln vor sich. Die thermischen Vorgänge sind also Massenerscheinungen, und darauf beruht Boltzmanns Lösung des erwähnten Zwiespalts: Er stellt den zweiten Hauptsatz als einen Wahrscheinlichkeitssatz hin. Es ist danach nicht notwendig, sondern nur überaus wahrscheinlich, daß sich die Temperaturen zweier sich berührenden Körper ausgleichen; das Gegenteil wäre nicht naturgesetzlich unmöglich, sondern ist nur selten, allerdings so selten, daß darauf zu warten hoffnungslos erscheinen muß. Auch daß ein Gas in zwei miteinander verbundenen Gefäßen sich freiwillig in das eine davon zurückzieht, ist nicht unmöglich, sondern nur überaus unwahrscheinlich. Boltzmann hat einmal die Zeiten abgeschätzt, innerhalb deren man einmal auf ein solches Ereignis hoffen kann. Es kommen dabei Zeiten heraus, größer als das Alter der Erde.

Woran erkennt man nun, ob eine Gesetzmäßigkeit eine statistische ist?

Fassen Sie bitte einmal ein so einfaches Beispiel für statistische Vorgänge ins Auge, wie es das Spiel mit einem Würfel ist. Daß bei einem Wurf die Ziffer 3 geworfen wird, hat die Wahrscheinlichkeit $^1/_6$. Bei 600 Würfen ist somit wahrscheinlicher als alles andere, daß 100 mal die 3 fällt, bei 6000 Würfen, daß sie 1000 mal fällt usw. Aber der Spieler, der diese Probe oft macht und jedesmal nachzählt, wird keineswegs unter je 600 Würfen genau 100 Dreierwürfe finden. Er wird fast ebensooft darunter 99 oder 101, oder auch 98 und 102 Dreierwürfe sehen; selbst erheblich größere Abweichungen von der 100-Zahl, wie etwa 90 und 110, werden ihm vorkommen. Es gehört zu den Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung, daß sie schlechthin jede Zahl von Dreierwürfen, selbst die äußersten Fälle 0 und 600, für möglich erklärt.

Oder denken Sie an eine Feuerversicherungsgesellschaft. Wenn diese aus langjährigen Erfahrungen weiß, daß von je 10000 versicherten Objekten im Jahre durchschnittlich 50 abbrennen (ich greife diese Zahl vollständig aus der Luft), so bedeutet das keineswegs, daß

[1]) V. Stern: Z. S. f. Physik. 2, 49; 3, 417, 1920.

genau diese Zahl Jahr für Jahr erreicht wird. Sie wird im Gegenteil manchmal über-, manchmal unterschritten; denn auch jene Aussage über die Durchschnittszahl ist eine statistische, eine Wahrscheinlichkeitsaussage.

Das Kennzeichen der Wahrscheinlichkeitsgesetze ist also, daß Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Geschehnis zu beobachten sind, Schwankungen darum herum. Und so erkennt man auch den statistischen Charakter der thermischen Vorgänge an den thermodynamischen Schwankungen.

Bevor wir aber zu diesen selbst übergehen, möchte ich Ihnen noch nach P. und T. Ehrenfest[2]) ein Glücksspiel nennen, welches dies Schwanken um einen Normalzustand herum besonders schön zeigt. In zwei Urnen liegen 100 numerierte Kugeln, außerdem haben wir einen Kasten mit 100 ebenfalls numerierten Zetteln; diese sind nach Zufall in dem Kasten verteilt. Wir ziehen auf gut Glück einen Zettel, stellen seine Nummer fest und legen ihn wieder zurück, nehmen aber gleichzeitig die Kugel mit derselben Nummer aus der Urne, in welcher sie liegt, und legen sie in die andere.

Enthält Urne Nr. 1 wesentlich mehr Kugeln als Nr. 2, so wird bei der nächsten Ziehung wahrscheinlich eine Nummer herauskommen, die eine Kugel in Urne Nr. 1 trägt. Diese Urne wird folglich wahrscheinlich von ihrem Überschuß abgeben. Es besteht eine Wahrscheinlichkeitstendenz zum Ausgleich der Urneninhalte. Andererseits kann die Verteilung von je 50 Kugeln pro Urne nicht dauernd sein. Ist sie einmal hergestellt, so muß die nächste Ziehung sie in dem einen oder anderen Sinne stören. Und selbst wenn die Abweichung von der Gleichverteilung erheblich ist, so kann sie bei den nächsten Ziehungen noch zunehmen. Unmöglich ist nicht einmal, daß alle Kugeln sich in einer Urne ansammeln. K. W. F. Kohlrausch und E. Schrödinger[3]) haben dieses Spiel einmal ausprobiert; Abb. 1 zeigt die Differenz der Urneninhalte in Abhängigkeit von der Zahl

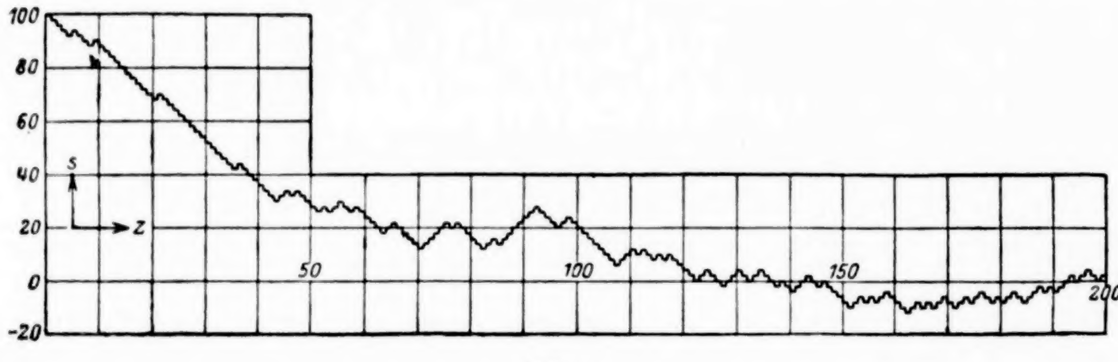


Abb. 1.

der Ziehungen. Anfangs sind alle 100 Kugeln in Urne Nr. 1; die Differenz sinkt dann bei den ersten vier Ziehungen, aber schon bei der fünften wächst sie wieder, entgegen der besprochenen Ausgleichstendenz. Und während sie dann weiterhin im großen und ganzen abnimmt, kommen doch immer wieder derartige wenig wahrscheinliche Zunahmen um kleine Beträge vor. Immerhin ist der Ausgleich nach 122 Zügen erreicht; aber sofort kommen wieder ein paar Kugeln im Überschuß nach Urne Nr. 1. Nach 143 Zügen hält sich die Differenz längere Zeit auf negativen Werten, d. h. Urne Nr. 2 ist voller. Im übrigen zeigt sich von etwa 130 Zügen an jenes dauernde Schwanken um den wahrscheinlichsten Zustand, welches für statistische Vorkommnisse so kennzeichnend ist.

Jetzt kehren wir zu dem in der Einleitung erwähnten Festkörper in der reibenden Flüssigkeit zurück. Die Aussage des zweiten Hauptsatzes lautet, er müsse zur Ruhe kommen; sie betrifft aber nur den wahrscheinlichsten Zustand. Tatsächlich werden wir geringe Abweichungen davon erwarten, also dauernde geringfügige Bewegung. Wie geringfügig diese sein muß, davon gibt der Satz der thermodynamischen Statistik Kunde, daß die mittlere Bewegungsenergie $\frac{3}{2} k T$ beträgt, wobei T die absolute Temperatur und k eine universelle Konstante ist, deren Wert, sofern wir Energien in Erg, Temperaturen in Celsiusgraden messen, $1{,}34 \cdot 10^{-16}$ beträgt. Bei Zimmertemperatur ($T = 300$) ist dann $\frac{3}{2} k T = 6 \cdot 10^{-14}$ Erg. Man vergleiche damit die Energie eines Gramms von der Geschwindigkeit 1 cm in der Sekunde, die $^1/_2$ Erg mißt; dann wird man verstehen, daß man zu mikroskopischen Körperchen übergehen muß, um etwas von dieser Bewegung wahrzunehmen.

Tatsächlich waren solche Bewegungen schon lange vor Boltzmann bekannt. 1827 hatte der englische Botaniker R. Brown[4]) sie unter dem Mikroskop bei Blütenstaub in Wasser

[2]) P. und T. Ehrenfest: Phys. Z. S. 8, 311, 1907.
[3]) K. W. F. Kohlrausch und E. Schrödinger: Phys. Z. S. 27, 306, 1926.
[4]) Wir entnehmen diese geschichtlichen Angaben aus der Schrift von Frau G. L. de Haas-Lorentz: Die Brownsche Bewegung und einige verwandte Erscheinungen. Braunschweig 1913 (Historische Übersicht).

gesehen. Er glaubte zunächst, eine Äußerung von Lebensvorgängen entdeckt zu haben; jedoch fiel diese Hypothese, als er die Bewegung an Blütenstaub von seit 100 Jahren getrockneten Pflanzen, an Ruß und gepulvertem Gestein wiederfand. Er dachte dann als Strömungen in der Flüssigkeit als Ursache — dann hätten aber benachbarte Teilchen ziemlich dieselbe Bewegung zeigen müssen im Widerspruch zur Beobachtung. Er dachte vorübergehend an gegenseitige Beeinflussung der Teilchen — aber heutzutage können wir leicht Teilchen beobachten, die von anderen fast isoliert sind und welche die Bewegung dennoch unverändert zeigen. Die wirkliche Ursache blieb Brown ebenso verborgen, wie seinen zahlreichen Nachfolgern in den nächsten 50 Jahren — kein Wunder bei der damaligen Unvollkommenheit der Molekulartheorie. Immerhin ergaben diese vielen Abänderungen der Versuchsanordnung neben gelegentlichen Irrtümern auch sehr wertvolle Beobachtungen, z. B., daß die Bewegung in zähen Flüssigkeiten geringer ist als in leichtflüssigen. Cantoni und Oehl fanden 1865, daß die Bewegung über ein Jahr unverändert bestehen blieb usw. Die richtige Deutung hat 1877 Delsaulx zusammen mit Carbonelle gegeben, ohne übrigens damit sogleich durchzudringen. Freilich spricht Delsaulx nicht von thermodynamischen Schwankungen — diesen Begriff hat man erst später geprägt —, sondern von den Stößen der Flüssigkeitsmolekeln gegen die eingelagerten Teilchen. Diese heben sich im Bewegungseffekt bei einem großen Körper so gut wie vollständig auf; bei einem kleinen aber ist die gegenseitige Kompensation keine vollständige mehr, weil ihn nur wenige Moleküle gleichzeitig treffen. Diese Erklärung steht aber nicht im Gegensatz zu der obigen; sie macht nur den Mechanismus dieser thermodynamischen Schwankung anschaulich. Ihretwegen spricht man auch von Brownscher Molekularbewegung.

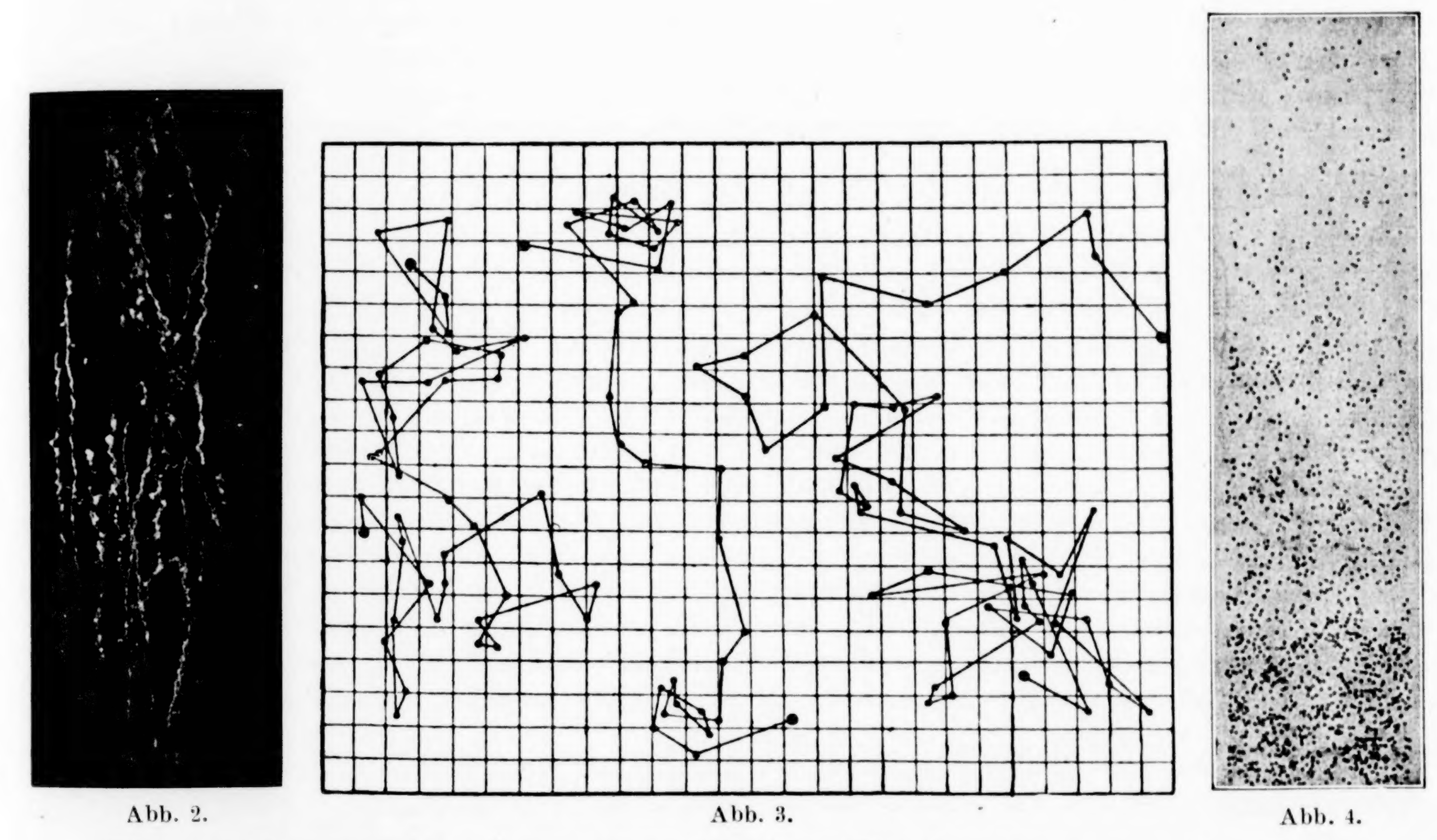


Abb. 2. Abb. 3. Abb. 4.

Eine Anschauung von dieser unregelmäßigen Zitterbewegung mag Ihnen die von Regener veröffentlichte Abb. 2 geben[5]). Sie stellt freilich keinen Dauerzustand dar, vielmehr fallen die hier im Mikroskop aufgenommenen Teilchen und zwar in Luft, statt in einer Flüssigkeit — das macht natürlich keinen wesentlichen Unterschied. Infolgedessen ist die Bewegung in der Vertikalen kein Hin und Her, sondern immer nach unten gerichtet. Aber in der Horizontalen überlagert sich über die Fallbewegung deutlich erkennbar jene Brownsche Zitterbewegung. Eine andere Darstellung, und zwar des Dauerzustandes, gibt Abb. 3. Perrin[6]) hat in ihr die Bewegung einzelner Teilchen (es sind 3 in der Abb.) in der Art nachgezeichnet, daß er in bestimmten Zeitabschnitten den Ort des Teilchens markierte — auf die Technik dieses Verfahrens kommt es hier weniger an — und diese Orte dann mit geraden Strichen verband. Über die tatsächliche Bewegung zwischen zwei markierten Stellen sagt diese Zeichnung freilich nichts aus; trotzdem erkennt man an ihr die völlige Regellosigkeit der Bahnen.

[5]) E. Regener: Z. J. f. techn. Physik 7, 154, 1926.
[6]) Die Hörer des Vortrages hatten durch die Liebenswürdigkeit von Herrn Professor Siedentopf aus Jena nach dem Vortrag Gelegenheit, die Bewegung selbst unter dem Mikroskop oder in mikroskopischer Projektion zu sehen.

Derartige Zeichnungen haben aber eine besondere Bedeutung. Man kann aus ihnen die mittlere Verschiebung eines Teilchens in ihrer Abhängigkeit von der Zeit entnehmen. Und da andererseits auf Grund der thermodynamischen Statistik Einstein und v. Smoluchowski eine quantitative Theorie dieser mittleren Verschiebung gegeben haben[7]), in welcher außer der Teilchengröße und gewissen gut meßbaren Konstanten der umgebenden Flüssigkeit die Temperatur T sowie die Konstante k eingehen, so kann man diese aus Zeichnungen der genannten Art entnehmen. Auf diese Art fand Perrin[8]) sehr genau den oben angeführten Wert von k. Darin liegt der quantitative Beweis für die Auffassung der Brownschen Bewegung als thermodynamische Schwankung.

Es verdient Hervorhebung, daß die Konstante k mit der ebenfalls oben erwähnten Zahl der Molekeln in einem engen Zusammenhang steht. Bestimmung der einen ist gleichzeitig Ermittelung der anderen. Somit kann man sagen: Perrin hat mittels der Brownschen Bewegung die Molekeln gezählt. Damit ist auf das Deutlichste der Zusammenhang hergestellt zu jener Delsaulx-Carbonelleschen Erklärung der Brownschen Bewegung.

Eng mit dieser Bewegung ist die Verteilung nach der Höhe verbunden, welche solche Teilchen unter dem Einfluß der Schwere zeigen. Wie ihre Fallbewegung aussieht, hat uns Abb. 1 gezeigt. Am Boden des Gefäßes aber werden die Teilchen am weiteren Fall verhindert, und sie sammeln sich — sofern sie nicht an der Wandung festkleben — in den unteren Teilen des Gefäßes an. Aber ihre Molekularbewegung läßt es nicht zu einem Ruhen auf dem Boden kommen, sondern führt jedes Teilchen immer wieder etwas in die Höhe. Und bei einer großen Zahl von Teilchen ist eine ganz gesetzmäßige (natürlich statistische, also Schwankungen unterworfene) Höhenverteilung das Ergebnis (Abb. 4). Durch Abzählung der Teilchen in bestimmter Höhenlage konnte Perrin[9]) wiederum auf Grund einer quantitativen statistischen Theorie die Konstante k und damit die Zahl der Molekeln messen. Die Übereinstimmung mit den sonst bekannten Werten ergibt eine zweite Bestätigung dafür, daß auch diese Verteilung das Ergebnis thermodynamischer Schwankungen darstellt.

Hingegen ist es nicht möglich, aus der Brownschen Bewegung unmittelbar die Geschwindigkeit der Teilchen zu entnehmen, die der Bewegungsenergie $\frac{3}{2}\,k\,T$ entspricht. Die Stöße der Molekeln folgen nämlich so rasch aufeinander und ändern die Bewegung der Teilchen so schnell, daß auf keine sichtbare Strecke die Geschwindigkeit einheitlich ist. Was man als Bahnstück der Bewegung zu sehen glaubt, ist deshalb auch beim besten Mikroskop das Ergebnis einer Unzahl unerkennbar kleiner Bahnelemente der verschiedensten Größe und Richtung. Wollte man etwa aus der Abb. 3 auf die Geschwindigkeit schließen, indem man den Abstand zwischen zwei markierten Punkten durch den zugehörigen Zeitabstand teilte, so käme man auf viel zu geringe Geschwindigkeiten. Darum ist eine neuere Untersuchungsreihe von so großer Bedeutung, welche nicht fortschreitende, sondern Drehbewegung zum Gegenstand hat. Man verdankt sie W. Gerlach und seinen Mitarbeitern Lehrer und Kappler[10]).

Hängt ein fester Körper frei drehbar an einem Faden, so bestimmt ihm dessen Torsion eine Ruhelage; seine Bewegung ist eine periodische Schwingung um diese, die natürlich stets durch die unvermeidliche Reibung gedämpft ist und daher allmählich erlischt. Aber nicht vollständig, es bleibt vielmehr immer eine Drehbewegung bestehen, deren kinetische Energie $\frac{1}{2}\,k\,T$ beträgt[11]). Und diese Bewegung ist durchaus sichtbar, wenn man einen Spiegel von 1—2 Quadratmillimeter an einem Quarzfaden von einigen Zentimetern Länge und einigen Zehntel μ Dicke befestigt (ein μ ist $\frac{1}{10\,000}$ Zentimeter). Es erfordert natürlich keine geringe Experimentierkunst, mit einem so zarten Gebilde zu arbeiten. Die Drehung des Spiegels setzt sich, noch dazu verdoppelt, in die horizontale Ablenkung eines an ihm reflektierten Lichtstrahls um. Fällt dieser auf einen in der Vertikalen bewegten photographischen Film, so verzeichnen sich die Schwingungen automatisch auf diesen in Form einer Kurve. Abb. 5 zeigt einen Ausschnitt aus einer solchen Kurve, die sich ungefähr als Sinuslinie wechselnder Amplitude und Phase beschreiben läßt. Da Zeitmarken von 60 zu 60 Sekunden mit verzeichnet sind, kann man aus ihr unmittelbar die Geschwindigkeit in jedem Augenblick, also auch die mittlere

[7]) A. Einstein: Ann. d. Phys. **19**, 371, 1906. M. v. Smoluchowski: Ann. d. Phys. **21**, 756, 1906. Weitere Literatur gibt das genannte Buch von de Haas-Lorentz.

[8]) J. Perrin: C. R. **146**, 967, 1908; **147**, 475, 1908.

[9]) G. Perrin: C. R. **147**, 530 u. 594, 1908.

[10]) W. Gerlach und E. Lehrer: Naturwissenschaften **15**, 15, 1927. E. Kappler, Ann. d. Phys. **11**, 233, 1931; **15**, 545, 1932.

[11]) Im Gegensatz zur translatorischen Bewegung, die nach drei Richtungen erfolgt, hat die Drehbewegung nur eine Richtung. Daher ist die kinetische Energie hier $\frac{1}{3}$ der früher genannten.

Geschwindigkeit entnehmen und daraus dann k oder, was dasselbe ist, die Zahl der Molekeln bestimmen. Die Übereinstimmung mit den sonst bekannten Werten erbringt den quantitativen Beweis, daß hier wiederum thermodynamische Schwankungen vorliegen.

Ganz gleichartige Schwankungen zeigen die Drehspulen empfindlicher Galvanometer; dies setzt eine untere Grenze für die mit ihnen meßbaren Stromstärken. Denn da die Spulen ohnehin nie in der „Ruhelage" sind, muß man ihnen, um ihre Bewegung merklich zu steigern, eine Energie größer als $\frac{1}{2}\,k\,T$ durch den zu messenden Strom zuführen. Das hat man schon vor den Versuchen Gerlachs und seiner Mitarbeiter bemerkt.

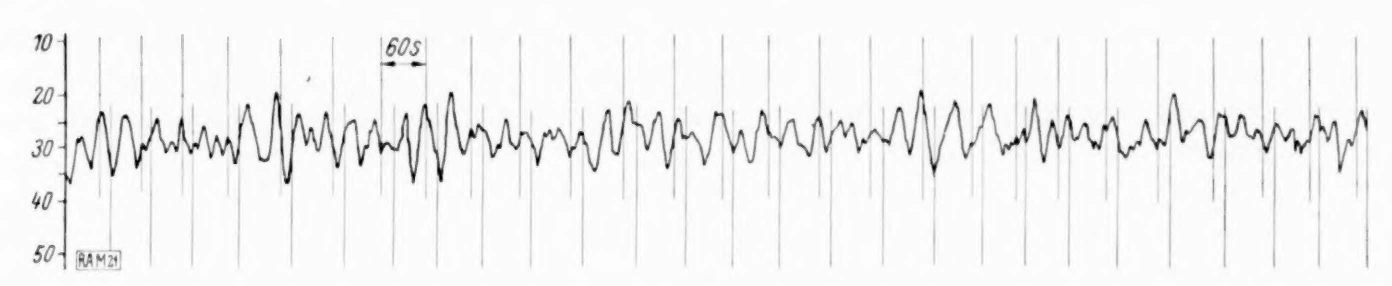


Abb. 5.

Von besonderem Interesse aber ist die Frage nach dem Mechanismus dieser Schwankungen. Man könnte an Molekelstöße aus der umgebenden Luft als Ursache denken; und in der Tat werden diese bei Atmosphärendruck wesentlich mitwirken. Aber bei der Aufnahme der Kurve von Abb. 5 war der Luftdruck auf 10^{-10} Atmosphären herabgesetzt. Selbst im vollkommenen Vakuum sähen die Schwankungen nicht viel anders aus als hier. Ihre Ursache ist nämlich in dem Quarzfaden zu suchen, an dem sich thermodynamische Schwankungen unter anderem in andauernden freiwilligen Torsionen wechselnder Größe zeigen, die bei den in Rede stehenden Messungen nur in ihrem zeitlichen Ablauf, nicht in ihrer Größe, durch den Spiegel am Faden beeinflußt werden. Sie bilden natürlich keine Eigentümlichkeit des Quarzfadens, sondern müßten bei geeigneten Versuchen bei allen Stoffen zu finden sein. Selbstverständlich ist ferner, daß die Torsion nicht die einzige Deformation ist, welche als Schwankungserscheinung freiwillig auftritt; das gleiche gilt auch von Volumenänderungen des Körpers, und diese wieder ergeben thermische Dichteschwankungen, so daß die Dichte auch bei einem völlig einheitlichen Körper niemals örtlich konstant ist.

Die bisher besprochenen Beobachtungen ließen sich alle nur im Laboratorium mit höchst subtilen Instrumenten anstellen. Darum ist eine Schwankungserscheinung vielleicht besonders interessant, die der Menschheit seit allen Zeiten geläufig, wenngleich in ihrer thermischen Ursache erst seit etwa 1900 erkannt ist. Die allbekannte Zerstreuung des Sonnenlichtes in der Atmosphäre, die dafür sorgt, daß wir in unseren Häusern Tageslicht haben, auch wenn die Sonne nicht unmittelbar ins Fenster scheint, beruht zum Teil gewiß auf Wassertröpfchen, Staub- und Rußteilchen, gelegentlich auf kleinen Eiskristallen, die in der Luft schweben, kurz: auf Fremdkörpern. Aber diese sind dafür nicht notwendig. Man kann im Laboratorium an sorgfältigst gereinigten Flüssigkeiten und Gasen sehr wohl die Zerstreuung des Lichtes beobachten; die Ursache bilden die erwähnten örtlichen Dichteschwankungen und die mit ihnen Hand in Hand gehenden Schwankungen des Brechungsindex. In der freien Atmosphäre aber ergeben diese Streuvorgänge wegen der Mächtigkeit der mitwirkenden Luftschicht jenes auffällige Phänomen des tiefblauen Himmels, das sich gerade beim Fehlen von Fremdkörpern in seiner ganzen Farbenpracht zeigt[12]). Auch dafür haben wir quantitativen Beweis. Wir haben dank v. Smoluchowski[13]) und Einstein[14]) eine statistische Theorie dieser „molekularen" Streuung, und Dember[15]) konnte durch Beobachtungen auf dem Piz von Teneriffa mit ihrer Hilfe wieder jene Konstante k oder die Zahl der Molekeln bestimmen; auch dabei fanden sich mit großer Genauigkeit die bekannten Werte.

Wir kommen zum Schluß. Wie gesagt, hat man erst spät das Statistische in den Gesetzen der Wärmelehre erkannt und anerkannt. Die dadurch erzielten Erfolge haben nun bei manchen zu der Neigung geführt, alle Naturgesetze als reine Wahrscheinlichkeitssätze anzusprechen. Das war freilich nicht Boltzmanns Meinung, der für die elementaren Vorgänge im Molekel oder zwischen einigen Molekeln durchaus die Gültigkeit streng verbindlicher Gesetze, nämlich der mechanischen, voraussetzte. Aber gerade heute hört man recht

[12]) Die Färbung beruht darauf, daß das kurzwellige blaue Licht ceteris paribus viel stärker gestreut wird, als das langwelligere gelbe oder rote. Deshalb überwiegt nämlich im Streulicht der blaue Anteil.

[13]) M. v. Smoluchowski, Ann. d. Phys. **25**, 205, 1908.

[14]) A. Einstein, Ann. d. Phys. **33**, 1275, 1920.

[15]) H. Dember: Ann. d. Phys. **49**, 599, 1916.

oft jene andere, zum Teil sicherlich „milieubedingte" Ansicht[16]). Gestatten Sie mir hierzu noch wenige Worte.

Eine, aber keineswegs die einzige Stütze dafür bildet der radioaktive Zerfall. Kein Zweifel: Zur Zeit können wir in dieser Hinsicht über das Atom eines radioaktiven Elementes nur die eine Aussage machen, welche in der Angabe seiner mittleren Lebensdauer liegt. Aus ihr können wir für jeden Zeitabschnitt die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß das Atom ihn überlebt. Wir kennen trotz zahlloser Versuche kein Mittel, den tatsächlichen Zeitpunkt des Zerfalls zu beeinflussen oder auch nur genauer vorauszusehen. Die wellenmechanische Theorie dafür gibt, dem Wesen der heutigen Wellenmechanik entsprechend, auch nichts anderes, als die genannte Wahrscheinlichkeitsaussage. Wer also meint, daß die Physik schon am Ende aller Weisheit steht, der kann in diesem Falle, aber auch bei allen anderen Atomvorgängen, nur an statistische Gesetzmäßigkeiten glauben. Ich allerdings schätze, was die Physik erreicht hat, bei aller Bewunderung der modernen Atomtheorie doch nicht ganz so hoch ein; vielmehr mache ich mich darauf gefaßt, daß die Natur, die uns schon so manche Überraschung bereitet hat, noch eine (sogar unerschöpfliche) Fülle unvorhersehbarer Beobachtungen in Vorrat hat. Jedenfalls aber wird sich der Forschungstrieb schwerlich befriedigt fühlen, bevor für den Vorgang im einzelnen Atom wieder streng verbindliche allgemein gültige Naturgesetze erkannt sind[17]). M 21

Ergänzende Bemerkung zum Weierstraßschen Vorbereitungssatz und bedingt-periodische Bewegungen.

Von *T. Levi-Civita* in Rom.

1. Fragestellung. Bei manchen hervorragenden Vertretern der theoretischen Physik scheint die Meinung zu gelten, daß im allgemeinen (d. h. unter passenden, doch nur qualitativen Beschränkungen) ein kanonisches System

$$\frac{dp_h}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_h}, \quad \frac{dq_h}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_h} \quad (h = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

bedingt-periodische Integralausdrücke zuläßt[1]). Damit will man sagen, daß die allgemeine Lösung $p_h(t)$, $q_h(t)$ von (1) durch (längs der Lösung) eindeutige Funktionen folgender Art

$$p_h = \varphi_h(J_1, J_2, \ldots, J_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

$$q_h = \psi_h(J_1, J_2, \ldots, J_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

darstellbar ist, wobei die J_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, die sogenannten Wirkungsvariablen, konstante Größen bezeichnen, dagegen die Winkelvariablen

$$w_\nu = \omega_\nu t + \beta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

lineare Funktionen der Zeit. Die β_ν, zusammen mit den J_ν, bilden die $2n$ Integrationskonstanten von (1); die ω_ν andererseits bedeuten ganz bestimmte Konstanten, und zwar Frequenzen, indem die Funktionen φ_h, ψ_h die wesentliche Eigenschaft besitzen sollen, in bezug auf alle w, periodisch zu sein mit der gemeinsamen Periode 2π.

In den folgenden Zeilen werde ich sehr einfach zeigen, daß nur unter sehr speziellen, genau angebbaren Bedingungen ein kanonisches System (1) sich durch bedingt-periodische Funktionen (2), (3) integrieren läßt. Es wird dadurch eine charakteristische Eigenschaft der bedingt-periodischen Systeme zutage treten und nebenbei ein nicht ganz unschädliches, zwischen Mechaniker und Physiker entstandenes Mißverständnis beseitigt. Deshalb wage ich diese kleine Bemerkung Herrn von Mises zu widmen, also gerade demjenigen Forscher, der durch eigene geistreiche Untersuchungen und durch Begründung und Leitung der ausgezeichneten, wohlverdienten „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" so kräftig und erfolgreich das Zusammenwirken aller Formen der angewandten Mathematik gefördert hat.

[16]) E. Schrödinger: Zwei Vorträge zur Kritik naturwissenschaftlicher Erkenntnis. Leipzig 1932.

[17]) Siehe hierzu M. v. Laue: Zu den Erörterungen über Kausalität. Naturwissenschaften 20, 915, 1932.

[1]) Ich glaube das namentlich aus einem Hinweise Frenkels entnehmen zu dürfen. Vgl. seinen Artikel: Über die Grundlagen . . ., Phys. Zeitschrift der Sowjetunion, Bd. 1, Heft 4, 1932, S. 486. Nicht verschweigen möchte ich jedoch, daß andere Autoren gerade die entgegengesetzte Vermutung ausgesprochen haben. Vgl. namentlich E. Fues im Artikel Störungstheorie (Geiger und Scheel, Handbuch der Physik, Bd. IV, S. 135).

2. Der Weierstraßsche Vorbereitungssatz. Es sei $F(x_1, x_2, \ldots, x_m; w)$ oder, in verkürzter Form, $F(x; w)$ eine eindeutige analytische Funktion der $m+1$ Argumente $x_1, x_2, \ldots, x_m, w$, die an der Stelle x_i^0, w^0 $(i = 1, 2, \ldots, m)$ verschwindet, ohne daß $F(x^0, w)$ identisch gleich Null für alle Werte von w sei, und sich in einer Umgebung

$$|x_i - x_i^0| \leq \delta, \quad |w - w^0| \leq \delta$$

dieser Stelle regulär verhält. Dann besagt der berühmte Vorbereitungssatz[2]), daß in einem wohldefinierten Bereiche B: $|x_i - x_i^0| \leq \varepsilon$, $|w - w^0| \leq \varepsilon$ $(\varepsilon \leq \delta)$ die Gleichung

$$F(x; w) = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

mit einer, in bezug auf w, ganzen algebraischen Gleichung

$$f = 0 \quad \ldots \quad (5')$$

gleichwertig ist, wo

$$f = w^r + a_1 w^{r-1} + a_2 w^{r-2} + \ldots + a_r, \quad \ldots \quad (6)$$

r eine ganze Zahl und die a, für $|x_i - x_i^0| \leq \varepsilon$, holomorphe Funktionen von den x allein bedeuten.

3. Unabhängigkeit von den Anfangswerten. Eine ziemlich selbstverständliche, doch bemerkenswerte Ergänzung des erwähnten Vorbereitungssatzes besteht darin, daß die Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots, a_r$ des (bezüglich w) Polynoms $f(x; w)$ von den Anfangswerten x_i^0, w^0 unabhängig sind.

Dies läßt sich deutlich ersehen, indem man irgendein zweites, im Innern des Bereiches B gelegenes, Wertsystem

$$x_i'^0, \; w'^0,$$

für welches $F(x'^0; w'^0) = 0$ ist, ins Auge faßt. Wenn man mit f' das, unter Zugrundelegung der Anfangswerte $x_i'^0$, w'^0, sich ergebende Polynom in w bezeichnet, so läßt sich leicht die behauptete Unabhängigkeit anerkennen. In der Tat, da das Wertsystem $x_i'^0$, w'^0 im Innern des Bereiches B liegt, so gilt dasselbe für jede Stelle x_i, w einer Umgebung B'

$$|x_i - x_i'^0| \leq \varepsilon', \quad |w - w'^0| \leq \varepsilon',$$

wenn nur ε' hinreichend klein ist. In B' müssen notwendigerweise die zwei Gleichungen $f = 0$, $f' = 0$ übereinstimmen, insofern beide der ursprünglichen Gleichung $F(x; w) = 0$ äquivalent sind; und zwar müssen beide, für w, dieselben r Werte liefern, sobald dieselbe Stelle x_i der Umgebung in Betracht gezogen wird. Der analytische Ausdruck davon ist gerade der Umstand, daß die Koeffizienten von f und f' genau dieselben Funktionen der x_i sind; also unabhängig sowohl von den x_i^0, als von den $x_i'^0$, w. z. b. w.

4. Elimination im kleinen. Eine andere unmittelbare und geläufige Folge des Vorbereitungssatzes ist die Zurückführung der Elimination, im allgemeinen analytischen Falle, auf eine wohlbekannte, rein algebraische Frage. Es sei, um sich am Konkreten zu halten, $G(x; w)$ eine sich wie $F(x; w)$ verhaltende Funktion, so daß $G(x^0; w^0) = 0$, usw. Dann ist in einem Bereiche, welchen man, ohne Verletzung der Strenge, mit dem früheren B identifizieren darf, die Gleichung

$$G(x; w) = 0$$

durch eine in w ganze algebraische Gleichung

$$g = w^s + b_1 w^{s-1} + b_2 w^{s-2} + \ldots + b_s = 0$$

ersetzbar. Aus dem Gleichungssystem

$$F = 0, \quad G = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

kann man dementsprechend w algebraisch eliminieren, als ob es sich um das (in w algebraische) System

$$f = 0, \quad g = 0 \quad \ldots \quad (7')$$

[2]) K. Weierstraß, Mathematische Werke, Bd. II, S. 135 bis 142.

handelte. Das Resultat der Elimination, welches man etwa in Determinantenform angeben kann, ist somit durch eine Gleichung

$$\Omega(x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

zwischen den x allein darstellbar, wobei Ω eine für

$$|x_i - x_i^0| \leq \varepsilon \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

reguläre Funktion bezeichnet.

5. Periodizität in bezug auf w. Wir fügen, in bezug auf $F(x;\, w)$, $G(x;\, w)$, die Voraussetzung hinzu, daß beide periodische Funktionen des Argumentes w mit der Periode 2π sind, und, in einem Streifen der w-Ebene, welcher die reelle Achse enthält, sich regulär verhalten. Für jeden reellen Wert w^0 seien selbstverständlich Wertsysteme x_i^0 vorhanden, für welche $F = 0$, $G = 0$. Dann läßt sich in der Umgebung jedes w^0 und der zugehörigen x_i^0, w eliminieren und eine bestimmte Resultante

$$\Omega(x) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

ableiten. Aus der Periodizität von F, G in bezug auf w und der in vorigen Nummern anerkannten lokalen Eindeutigkeit von $\Omega(x)$ geht ohne weiteres hervor, daß, in der Umgebung kongruenter w-Werte, wie w^0 und $w^0 + 2N\pi$ (N ganze Zahl), die betreffenden $\Omega(x)$ ein gemeinsames Regularitätsgebiet besitzen und darin identisch sein müssen.

Mit anderen Worten, die Unendlichvieldeutigkeit, welche im allgemeinen jeder, aus Gleichungen wie $F(x;\, w) = 0$ oder $G(x;\, w) = 0$, entstehenden Funktion w anhaftet, hebt sich vollständig fort durch die Elimination von w.

6. Verallgemeinerung und Anwendung auf bedingt-periodische Systeme. Die soeben hervorgehobene Eigenschaft der Elimination einer Winkelvariablen w aus zwei Gleichungen $F(x;\, w) = 0$, $G(x;\, w) = 0$ läßt sich leicht verallgemeinern. Ohne auf Einzelheiten einzugehen sind wir schon imstande, eine Anwendung anzuführen, die sich auf bedingt-periodische Systeme bezieht.

Die betreffenden Definitionsgleichungen (2), (3) kann man schreiben

$$p_h - \varphi_h(J;\, w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0, \quad q_h - \psi_h(J;\, w_1, w_2, \ldots, w_n) = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n)\,. \quad (9)$$

und als $2n$ Gleichungen zwischen den p, q, J und w ansehen. Die Winkelvariablen w lassen sich daraus eliminieren, und so ergeben sich n, in den p, q, J, eindeutige[3]), analytische (längs jeder Bahn) reguläre Relationen der Form

$$\Omega_k(p;\, q;\, J) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10).$$

Das bedeutet aber, daß jedes bedingt-periodische System gerade n eindeutige Integralrelationen zuläßt. Da (ebenfalls als eine Folge des Vorbereitungssatzes) die n Gl. (10), wenn auch nicht algebraisch in den J, sich doch (in jedem hinreichend beschränkten Bereiche) algebraisch verhalten, so können wir annehmen, daß ihre Auflösung nach den J, wenn nicht eigentlich eindeutig, jedenfalls endlich-vieldeutig ausfällt.

Jedes bedingt-periodische System besitzt also gerade n endlich-vieldeutige Integrale

$$u_k(p;\, q) = J_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)\,.$$

Setzt man außerdem voraus, daß die Integralformeln (2), (3) eine kanonische Transformation zwischen den p, q einerseits und den J, w andererseits bilden, in der die einzelnen Paare J_k, w_k konjugiert sind[4]), dann sind die n Integrale u_k notwendig paarweise in Involution[5]) und die genannten Systeme gehören deswegen (wie speziell diejenigen, für welche die Variablen separierbar sind) gewissermaßen zur elementaren Klasse der Liouvilleschen Systeme[6]).

[3]) Hier liegt die wesentliche, nur angekündigte, Verallgemeinerung der obigen Betrachtungen.

[4]) Dafür ist bekanntlich notwendig und hinreichend, daß, gemäß (2), (3), die Differenz

$$\sum_1^n {}_h\, p_h\, dq_h - \sum_1^n {}_k\, J_k\, dw_k$$

ein vollständiges Differential ist, oder in expliziter Weise, daß die Poissonschen Klammerausdrücke der Funktionen (2), (3) die Werte 1 oder 0 besitzen, je nachdem es sich um konjugierte oder nicht konjugierte Funktionen handelt.

[5]) Für $n = 2$, das ist immer der Fall. Vgl. H. Kneser, Untersuchungen zur Quantentheorie, Math. Ann., B. 84, 1921. S. 277—302.

[6]) Vgl. z. B. Levi-Civita und Amaldi: Lezioni di Meccanica Razionale, Vol. II, zweiter Teil (Bologna, Zanichelli, 1927), S. 384, 415.

Dynamische Gesichtspunkte zu einer statistischen Turbulenztheorie.

Von *F. Noether* in Breslau.

Daß die Gesetze der turbulenten Strömung nicht, wie man ursprünglich wohl annahm, wesentlich dynamischen Charakter haben, sondern mehr einem statistischen Gleichgewicht entsprechen, hat als erster R. v. Mises ausdrücklich betont[1]). Ein bestimmteres Ziel hat diese Forderung nach einer statistischen Theorie durch den Prandtlschen Begriff des „Mischungswegs" bekommen, der in Analogie zur „freien Weglänge" der kinetischen Gastheorie gebildet ist[2]). Für den Fall hoher Reynoldsscher Zahlen, wenn also die Reibung nur in unmittelbarer Nähe der Wände einen bestimmenden Einfluß ausübt, ist seine Größe, im Verhältnis zur Kanalbreite, empirisch ermittelt als eine über den Querschnitt veränderliche Zahl, die in der Mitte ein Maximum erreicht und an den Wänden gegen Null absinkt[3]). Ihre mittlere Größenordnung ist $^1/_{20}$ der Kanalbreite.

Ferner konnte v. Kármán[4]) eine Hypothese formulieren — Ähnlichkeit der über die Hauptströmung überlagerten Wirbelströmung in verschiedenen Schichten —, die in verwandter Weise die Existenz einer über den Querschnitt veränderlichen Länge $l(y)$ fordert und für diese Funktion auch einen analytischen Ausdruck liefert, der, mit Ausnahme eines kleinen Gebiets um die Kanalmitte, mit dem empirischen gut übereinstimmt. In dieser Theorie, die zugleich auch einen analytischen Ausdruck für die Strömungsverteilung liefert, ist nur noch eine Konstante enthalten, die nachträglich auf empirischem Wege aus den Strömungen ermittelt werden muß. Eine Aufgabe der statistischen Theorie ist es, diese Konstante theoretisch zu bestimmen.

Obwohl die Ähnlichkeitshypothese, wie man leicht sieht, nicht strenge mit den hydrodynamischen Grundgleichungen verträglich ist, so glaube ich doch, daß den mit ihrer Hilfe gefundenen Gleichungen wenigstens als Näherung eine über die Hypothese selbst hinausreichende Bedeutung für die theoretische Beschreibung der turbulenten Strömung zukommt, und habe dies bereits vor einiger Zeit näher ausgeführt[5]). Vom rein hydrodynamischen Standpunkt aus beruhen nämlich diese Gleichungen auf einer weitergehenden Berücksichtigung der nichtlinearen Trägheitsglieder in den Grundgleichungen, als es in den linearen Untersuchungen zur Turbulenztheorie (Methode der kleinen Schwingungen) möglich war. Es ist dann aber näherliegend und übersichtlicher, sofern die Reibung doch vernachlässigt werden soll, gar nicht die Zerlegung in Grundbewegung und überlagerte zusätzliche Wirbel vorzunehmen; vielmehr kann man gleich von den bekannten vollständigen Integralen ausgehen, die in den Helmholtzschen Wirbelsätzen vorliegen, und die ganze Strömung als aufgebaut aus solchen einzelnen Wirbelfäden betrachten, nach dem Schema von Abb. 1, wie ich l.c. näher ausgeführt habe. Ein ähnliches Strömungsmodell bespricht auch W. Betz[6]) in Verbindung mit der Ähnlichkeitshypothese. An Stelle des „Mischungswegs" tritt in diesen Auffassungen ein mittlerer Abstand zwischen diesen Wirbelfäden. Man kann dann den v. Kármánschen Gleichungen eine einfache Deutung geben, die ein gewisses statistisches Gleichgewicht in der Verteilung dieser Wirbel zum Ausdruck bringt. Die Ähnlichkeitshypothese erscheint dabei nur in der Voraussetzung wieder, daß die mittleren Längs- und Querabstände zwischen diesen Wirbeln — a und b in Abb. 1 — in ungefähr konstantem Verhältnis zueinander stehen sollen[7]).

Eine genauere Durchführung einer Turbulenztheorie auf solcher Grundlage soll für später vorbehalten bleiben; an dieser Stelle will ich nur einen dynamischen Gesichtspunkt, als Teil der gedachten Theorie besprechen, der die Einführung einer besonderen Ähnlichkeitshypothese entbehrlich macht. Das zugrunde gelegte Strömungsmodell, Abb. 1, erinnert an die bekannte „Wirbelstraße" v. Kármáns, die aus einer Reihe rechts- und einer Reihe linksdrehender Wirbel, alle gleicher Größe, besteht[8]). Diese Wirbel ändern im Gleichgewichtsfall ihre relative Lage zueinander nicht, und ihre Stabilität kann daher im

[1]) R. v. Mises: Über die gegenwärtige Krise der Mechanik, Diese Ztschr. 1, 1921, S. 425 f.

[2]) L. Prandtl: Über die ausgebildete Turbulenz, Verh. d. 2. intern. Kongr. f. techn. Mechanik, Zürich 1926, S. 62.

[3]) W. Tollmien: Turbulente Strömungen, Handb. d. Experimentalphysik, 4,I, S. 309 f., insbes. S. 325.

[4]) Th. v. Kármán: Mechanische Ähnlichkeit und Turbulenz, Göttinger Nachr. math. phys. Kl. 1930, S. 58.

[5]) F. Noether: Zur statistischen Deutung der Kármánschen Ähnlichkeitshypothese in der Turbulenztheorie, Diese Ztschr. 11, 1931, S. 224.

[6]) W. Betz: Die v. Kármánsche Ähnlichkeitshypothese für turbulente Vorgänge in physikalischer Deutung, Diese Ztschr. 11, 1931, S. 397.

[7]) Die Nichtlinearität der Grundgleichungen und die Notwendigkeit statistischer Betrachtungen in physikalischen Theorien scheint immer zusammenzuhängen. In dieser Richtung liegt vielleicht auch eine nicht nur oberflächliche Analogie zwischen dem Turbulenzproblem und den wirklichen Grundlagen der heutigen Quantenmechanik.

[8]) v. Kármán: Flüssigkeits- und Luftwiderstand, Gött. Nachr. math. phys. Kl. 1911, S. 509; 1912, S. 547 Phys. Ztschr. 13, S. 49, 1913. S. auch H. Lamb: Hydrodynamik. 5. engl. oder 2. deutsche Aufl. Kap. VII, § 156.

Sinne einer reinen Störungsrechnung untersucht werden. In unserem Bild dagegen müssen sich die einzelnen Reihen in der Längsrichtung mit verschiedenen Geschwindigkeiten bewegen, und die Wirbel müssen unter dem gegenseitigen Einfluß auch Querbewegungen ausführen. (Diese machen, strenge genommen, eine Spiegelung an den Wänden notwendig, zur Erfüllung der Gleitbedingung, wovon wir jedoch absehen.) Bei der Wirbelstraße ist als Stabilitätsbedingung ein bestimmtes Verhältnis zwischen den Längs- und Querabständen vorauszusetzen, wie sich dort auf dynamischem Wege ergibt; hier ist Stabilität im dynamischen Sinn nicht möglich, nur im statistischen, indem die einzelnen Wirbel ihre Lage austauschen (dabei sekundär auch ihre Einzelgröße verändern), während nur das Gesamtbild im Mittel erhalten bleibt. Trotzdem wird man eine Analogie zwischen der „Ähnlichkeitshypothese" und der Konstanz des Verhältnisses bei der Wirbelstraße vermuten können. Die Frage muß hier lauten: Unter welchen Bedingungen kann die zweifellos vorhandene dynamische Labilität möglichst klein gemacht werden? Der dann noch verbleibende Rest von Labilität wird eben den statistischen Wirbelaustausch herbeiführen müssen.

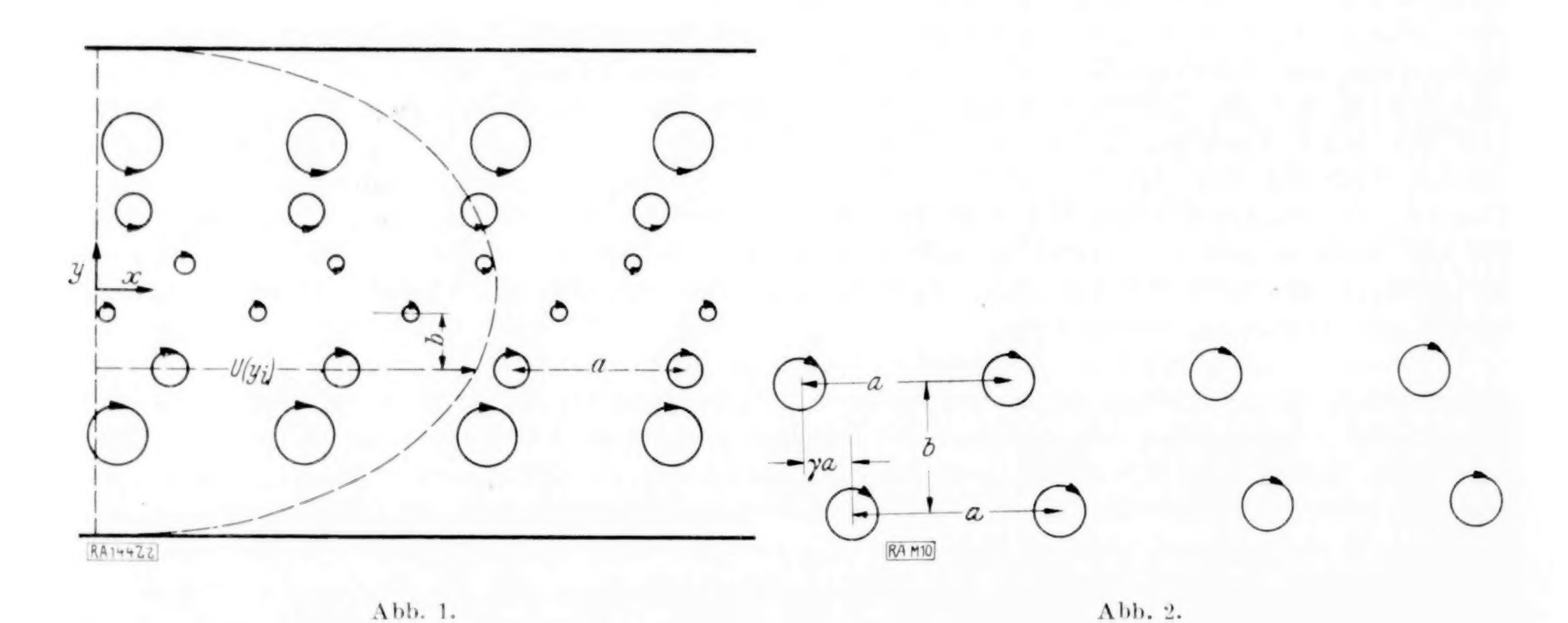


Abb. 1. Abb. 2.

Zur Behandlung dieser Frage beschränken wir uns hier auf ein noch einfacheres Bild (Abb. 2), indem wir nur 2 benachbarte Reihen des Wirbelsystems der Abb. 1 betrachten. Das Bild unterscheidet sich dann von der Wirbelstraße nur dadurch, daß die Drehung in beiden Reihen jetzt gleichgerichtet ist, während sie dort entgegengesetzt wäre. Wir werden sie nachher auch praktisch gleichsetzen, schreiben aber vorläufig zur übersichtlicheren Ableitung der Formeln $+\varkappa_1$ bzw. $+\varkappa_2$ für die Intensität der einzelnen Wirbel in der oberen bzw. unteren Reihe. Der Längsabstand in beiden Reihen sei a, der Querabstand zwischen den Reihen b; die erstere Richtung sei die x-, die letztere die y-Richtung des Koordinatensystems. Beide Reihen haben dann eine mittlere Längsgeschwindigkeit U_1 bzw. U_2, und ihre mittlere relative Längsgeschwindigkeit berechnet sich zu

$$U_0 = U_1 - U_2 = \frac{\varkappa_1 + \varkappa_2}{2a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Der Geschwindigkeitsunterschied beiderseits einer einzelnen Reihe ist nämlich bis auf Glieder von der relativen Größenordnung $e^{-\pi b/a}$[9]) [im Abstand b gerechnet; vgl. die Formeln bei Lamb, l. c., § 156, (4) (5)]: $\varkappa_1/a$ bzw. $\varkappa_2/a$. Für die Relativbewegung beider Reihen muß je der halbe Unterschied in Ansatz gebracht werden. Von der relativen Größenordnung $e^{-\pi b/a}$ sind auch die Querbewegungen der Wirbel. Wir lassen auch diese in der Grundbewegung fort, da sie in der nachfolgenden Störungsrechnung nur zu Gliedern zweiter Ordnung Anlaß geben würden.

Um nun für diesen Fall die Störungsgleichungen aufzustellen, betrachten wir eine Lage, in der die Wirbel der ersten Reihe, mit der Intensität $\varkappa_1$, die Koordinaten $x = ma$, $y = 0$ haben (m von $-\infty$ bis $+\infty$), die der zweiten Reihe, mit der Intensität $\varkappa_2$, die Koordinaten $x = (n + \gamma)\,a$, $y = -b$ (n von $-\infty$ bis $+\infty$). Hier ist γ eine Zahl zwischen 0 und 1, die die momentane relative Lage der letzteren Wirbel zu den ersteren mißt. Die Verschiebungen aus diesen Lagen seien ξ_m, η_m in der ersten, ξ_n', η_n' in der zweiten Reihe.

Die Geschwindigkeiten, die die einzelnen Wirbelfäden sich gegenseitig erteilen, können nun genau analog wie bei der Wirbelstraßentheorie berechnet werden. Wenn man Glieder

[9]) Wenn $\pi b/a$ hinreichend groß ist, um Hyperbelfunktionen durch Exponentialfunktionen ersetzen zu können.

2. Ordnung in den ξ, η vernachlässigt, findet man sie aus den Gl. (7), (8), (9) bzw. (14), (15) bei Lamb (l. c.), indem man hier n durch $n+\gamma$ ersetzt und außerdem noch $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ unterscheidet, während dort $\varkappa_1 = -\varkappa_2$. Die Störungsgleichungen für den Wirbel $m = 0$ in der ersten Reihe lauten dann:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi\left(\frac{d\xi_0}{dt} + U_1\right) &= -\varkappa_1 \Sigma_m' \frac{\eta_0 - \eta_m}{m^2 a^2} + \varkappa_2 \Big[\Sigma_n \frac{b}{(n+\gamma)^2 a^2 + b^2} \\ &\quad - \Sigma_n \frac{(n+\gamma)^2 a^2 - b^2}{[(n+\gamma)^2 a^2 + b^2]^2}(\eta_0 - \eta_n') + \Sigma_n \frac{2(n+\gamma)ab}{[(n+\gamma)^2 a^2 + b^2]^2}(\xi_0 - \xi_n')\Big] \\ 2\pi \frac{d\eta_0}{dt} &= -\varkappa_1 \Sigma_m' \frac{\xi_0 - \xi_m}{m^2 a^2} - \varkappa_2 \Big[\Sigma_n \frac{(n+\gamma)^2 - b^2}{[(n+\gamma)^2 a^2 + b^2]^2}(\xi_0 - \xi_n') + \Sigma_n \frac{(n+\gamma)a}{(n+\gamma)^2 a^2 + b^2} \\ &\quad - \Sigma_n \frac{2(n+\gamma)ab}{[(n+\gamma)^2 a^2 + b^2]^2}(\eta_0 - \eta_n')\Big] \end{aligned}\right\} \quad . \quad (2).$$

Sowohl Σ_n als auch Σ_m' gehen von $-\infty$ bis $+\infty$; in der Σ_m' ist aber das Glied $m = 0$ auszulassen, während in der Σ_n auch das Glied $n = 0$ enthalten ist.

Die beiden entsprechenden Gleichungen für die Verschiebungen ξ_0', η_0' in der zweiten Reihe erhält man aus (2) durch Vertauschung der Koordinaten; dabei ist zugleich $\varkappa_1$ mit $\varkappa_2$, U_1 mit U_2 zu vertauschen, sowie b durch $-b$ und γ durch $-\gamma$ zu ersetzen. Das Glied U_1 auf der linken Seite von (2) wird von der Summe $\Sigma_n \frac{b}{(n+\gamma)^2 a^2 + b^2}$ auf der rechten Seite im Mittel aufgehoben (genau für $\gamma = 0$); die Abweichung entspricht dem oben erwähnten Umstand, daß wir die Ungleichförmigkeit der Längsbewegung vernachlässigen. Das gleiche gilt von dem Glied $\Sigma_n \frac{(n+\gamma)a}{(n+\gamma)^2 a^2 + b^2}$ in der zweiten Gleichung, das den vernachlässigten Querbewegungen in der Grundbewegung entspricht, und das für $\gamma = 0$ in der Summe verschwinden würde. Wir haben mit Rücksicht hierauf nur die Glieder beizubehalten, die die Faktoren ξ, η, ξ', η' selbst enthalten.

Wir führen nun auch hier, in Fortsetzung der Analogie, eine fortschreitende Welle ein, indem wir setzen:

$$\xi_m = \alpha e^{im\varphi}, \quad \eta_m = \beta e^{im\varphi}, \quad \xi_n' = \alpha' e^{in\varphi}, \quad \eta_n' = \beta' e^{in\varphi} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3).$$

Die Koeffizienten α, β, α', β' enthalten hier die zeitliche Abhängigkeit der Schwingung. Für sie bekommen wir ein lineares Gleichungssystem, das sich von dem entsprechenden speziellen [Lamb, l. c., Gl. (17), (22)] nur wenig unterscheidet. Es hat die etwas allgemeinere Form:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi a^2}{\varkappa_2}\frac{d\alpha}{dt} &= D\alpha + A\beta + B\alpha' + C\beta'; \quad & \frac{2\pi a^2}{\varkappa_2}\frac{d\beta}{dt} &= A\alpha - D\beta + C\alpha' - B\beta' \\ \frac{2\pi a^2}{\varkappa_1}\frac{d\alpha'}{dt} &= D'\alpha' + A'\beta' - B'\alpha + C'\beta; \quad & \frac{2\pi a^2}{\varkappa_1}\frac{d\beta'}{dt} &= A'\alpha' - D'\beta' + C'\alpha + B'\beta \end{aligned} \quad . \ . \quad (4).$$

Dabei sind die Koeffizienten A bis D, wenn man noch für das gesuchte Abstandsverhältnis b/a die Bezeichnung k einführt, so zu berechnen:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\Sigma_m' \frac{1 - e^{im\varphi}}{m^2} - \Sigma_n \frac{(n+\gamma)^2 - k^2}{[(n+\gamma)^2 + k^2]^2}; \\ B &= \Sigma_n \frac{2(n+\gamma)k e^{in\varphi}}{[(n+\gamma)^2 + k^2]^2}; \quad C = \Sigma_n \frac{[(n+\gamma)^2 - k^2]e^{in\varphi}}{[(n+\gamma)^2 + k^2]^2}; \quad D = -\Sigma_n \frac{2(n+\gamma)k}{[(n+\gamma)^2 + k^2]^2} \end{aligned} \quad . \ . \quad (5).$$

Man kann diese Ausdrücke summieren und findet dann[10]):

[10]) Die Summation ergibt sich so: Man bildet $(C + iB)\, e^{\mp k\varphi}$, woraus durch 2-maliges Differenzieren die Fouriersche Darstellung einer „Zackenfunktion" folgt (überall 0, bei $2n\pi$ integrabel unendlich). Also ist der differenzierte Ausdruck selbst im Periodenintervall eine lineare Funktion mit Richtungsunstetigkeit bei $2n\pi$. Diese kann man durch ihren Summenwert bei $\varphi = 0$, sowie durch den Summenwert des 1. Differentialquotienten bei $\varphi = \pi$ bestimmen. Beides führt auf bekannte Partialbruchzerlegungen. D ergibt sich aus B für $\varphi = 0$, aus C ergibt sich der erste Teil von A für $k = 0$, $\gamma = 0$, der zweite Teil für $\varphi = 0$.

$$A = -\frac{\varkappa_1}{\varkappa_2}\frac{1}{2}\varphi(2\pi-\varphi) + \frac{1}{2}\pi^2\left[\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2(k+i\gamma)\pi} + \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2(k-i\gamma)\pi}\right];$$

$$C \pm iB = -\pi\varphi\, e^{i\gamma\pi}\frac{e^{\pm k(\pi-\varphi)}}{\mathfrak{Sin}\,(k\pm i\gamma)\pi} - \pi^2\frac{e^{\pm k\varphi}}{\mathfrak{Sin}^2(k\pm i\gamma)\pi}; \quad \ldots \quad (6).$$

$$D = \frac{1}{2}i\pi^2\left[\frac{1}{\mathfrak{Sin}^2(k+i\gamma)\pi} - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2(k-i\gamma)\pi}\right]$$

Die Koeffizienten A', $-B'$, C', $-D'$ erhält man hieraus durch Vertauschung von k mit $-k$, γ mit $-\gamma$ und $\varkappa_1$ mit $\varkappa_2$.

Diese in allgemeinerer Form berechneten Koeffizienten enthalten natürlich als Spezialfälle auch die der Wirbelstraßentheorie für die beiden Gleichgewichtsfälle [Lamb, l. c. Gl. (19) — (21) und (30) — (32)]. Dann ist $\varkappa_1 = -\varkappa_2$, und ferner für den 1. Gleichgewichtsfall (symmetrische Wirbelanordnung) $\gamma = 0$, für den 2. Fall (abwechselnde Anordnung) $\gamma = \frac{1}{2}$ zu setzen. In beiden Fällen ist $D = 0$, A und C rein reell, B rein imaginär. Der letztere Fall hat die geringere Labilität und kann durch geeignete Wahl von k (nämlich $\mathfrak{Sin}\, k\pi = \pm 1$) stabil gemacht werden.

Für unseren Fall der 2 gleichsinnigen Wirbelreihen können wir praktisch $\varkappa_1 = \varkappa_2$ voraussetzen, da benachbarte Wirbelreihen im Verband der ganzen Strömung wenig verschiedene Stärke haben werden. Die berechneten Koeffizienten sind in jedem Falle periodische Funktionen in bezug auf γ mit der Periode 1; da die relative Verschiebung zwischen beiden Reihen $\gamma a = (U_2 - U_1)\,t$ (mit der in Gl. (1) vorausgesetzten Näherung), so sind diese Koeffizienten also periodische Funktionen der Zeit. Das ganze Gleichungssystem (4) hat daher den Charakter von verallgemeinerten Hillschen Differentialgleichungen, und durch Anwendung der in der Hillschen Theorie entwickelten Methoden[11]) ließe sich die Stabilitätsfrage in dieser Hinsicht streng behandeln. Indes ist es für unsere Zwecke ausreichend, diese genauere Berechnung durch eine angenäherte zu ersetzen, um so mehr, als es sich bestimmt immer um Labilität handelt, und nur eine Schwankung des Labilitätsmaßes vorliegt. Wir ersetzen die veränderlichen Koeffizienten durch Konstanten, und zwar wählen wir hierfür die Werte, die sich für $\gamma = 0$ ergeben; denn in diesen Momenten, für die die Wirbel beider Reihen geringsten gegenseitigen Abstand haben, ist die Labilität am größten, ebenso wie auch die erste Gleichgewichtslage der Wirbelstraße labiler ist als die zweite. Mit $\gamma = 0$, $\varkappa_1 = \varkappa_2$ wird $D = D' = 0$, und es ist $A = A'$, $B = B'$, $C = C'$; ferner wie bei der Wirbelstraße A und C rein reell, B rein imaginär. Der Wert von A unterscheidet sich von den dortigen durch ein Vorzeichen.

Die Frage nach dem Minimum der Labilität in dieser Lage ist nun so zu stellen: Wir denken uns die Längsabstände a als fest gegeben, b bzw. $k = b/a$ als veränderlich. Man muß dann aber in den Differentialgleichungen (4) auch $\varkappa$ als veränderlich ansehen; denn im Rahmen der ganzen Strömung nach Abb. 1 ist nicht $\varkappa$, sondern eher der mittlere Geschwindigkeitsgradient $\frac{\partial U}{\partial y}$ als vorgegeben zu betrachten. Dieser wird aber nach (1):

$$U' = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{U_1 - U_2}{b} = \frac{\varkappa}{ab} = \frac{\varkappa}{a^2 k} \quad \ldots \quad (7).$$

Die Differentialgleichungen (4) schreiben sich damit so:

$$\text{I. } \frac{2\pi}{U'}\frac{d\alpha}{dt} = k(A\beta + B\alpha' + C\beta'), \quad \text{II. } \frac{2\pi}{U'}\frac{d\beta}{dt} = k(A\alpha + C\alpha' - B\beta')$$
$$\text{III. } \frac{2\pi}{U'}\frac{d\alpha'}{dt} = k(A\beta' - B\alpha + C\beta), \quad \text{IV. } \frac{2\pi}{U'}\frac{d\beta'}{dt} = k(A\alpha' + C\alpha + B\beta) \quad \ldots \quad (8),$$

und die Minimumsfrage bezieht sich bei gegebenem U' auf diese Koeffizienten kA, usw.

[11]) E. T. Whittaker u. G. N. Watson: Modern Analysis, Cambridge 1927, S. 413f. M. J. O. Strutt: Lamésche, Mathieusche u. verwandte Funktionen. Ergebnisse d. Math. 3, S. 12f., 1932.

Die 4 Gleichungen (8) lassen sich nun auch hier, was kaum im voraus zu erwarten war, in 2 Paare von je 2 Gleichungen zusammenfassen (in anderer Anordnung als im Fall der Wirbelstraße), indem wir bilden:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}+\mathrm{IV}: \quad & \frac{2\pi}{U'}\frac{d(\alpha+\beta')}{dt} = k\,[C(\alpha+\beta') + (A+B)(\alpha'+\beta)] \\ \mathrm{II}+\mathrm{III}: \quad & \frac{2\pi}{U'}\frac{d(\alpha'+\beta)}{dt} = k\,[C(\alpha'+\beta) + (A-B)(\alpha+\beta')] \end{aligned} \quad \ldots\ldots\ldots (9).$$

Mit dem Zeitfaktor $e^{\lambda t}$, ferner $2\pi\lambda/U' = \sigma$, folgt hieraus:

$$\left(C - \frac{\sigma}{k}\right)^2 - (A^2 - B^2) = 0; \quad \sigma_1 = k\left(C \pm \sqrt{A^2 - B^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (10).$$

Da C reell, B rein imaginär ist, so handelt es sich immer um einen labilen Zustand. Ebenso erhält man:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}-\mathrm{III}: \quad & \frac{2\pi}{U'}\frac{d(\alpha-\beta')}{dt} = -k\,[C(\alpha-\beta') + (A-B)(\alpha'-\beta)] \\ \mathrm{I}-\mathrm{II}: \quad & \frac{2\pi}{U'}\frac{d(\alpha'-\beta)}{dt} = -k\,[C(\alpha'-\beta) + (A+B)(\alpha-\beta')] \end{aligned} \quad \ldots\ldots (11),$$

woraus jetzt folgt:

$$\left(C + \frac{\sigma}{k}\right)^2 - (A^2 - B^2) = 0; \quad \sigma_2 = k\left(-C \pm \sqrt{A^2 - B^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

Wie oben liegt ein labiler Zustand vor.

Wir können nun für die Diskussion der Minimumsforderung noch die Phasengröße φ, deren reziproker Wert die Rolle der Wellenlänge spielt, variieren. Wegen des ersten Teils in A [nach Gl. (6)], der bei hinreichend großem k der überwiegende ist, sieht man, daß der Fall $\varphi = \pi$ am ungünstigsten (größte Labilität) sein wird. In der Tat entspricht dieser Fall dem größten Phasenunterschied (nämlich π) zwischen benachbarten Wirbeln der gleichen Reihe. Er muß daher immer dann auftreten, wenn die Störung in der Verschiebung eines einzelnen Wirbels aus der Reihe heraus besteht, die dann eine Drehung der übrigen Teile der Reihe nach sich zieht. Kleinere oder größere φ bedeuten größere Wellenlänge, d. h. gemeinsame Bewegung eines größeren Wirbelkomplexes.

Für den Fall $\varphi = \pi$ ergibt sich nun, noch mit den übrigen Vereinfachungen $\gamma = 0$, $\varkappa_1 = \varkappa_2$:

$$A = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{\pi^2}{\mathfrak{Sin}^2\, k\pi}; \quad B = 0; \quad C = -\pi^2\,\frac{\mathfrak{Cof}\, k\pi}{\mathfrak{Sin}^2\, k\pi} \quad \ldots\ldots\ldots (13),$$

und für die Labilität sind nach (10), (12) maßgebend:

$$k(A+C) = -\frac{1}{2}\pi^2 k\left(1 + \frac{1}{\mathfrak{Cof}^2\,\frac{1}{2}k\pi}\right); \quad k(A-C) = \frac{1}{2}\pi^2 k\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{Sin}^2\,\frac{1}{2}k\pi}\right) \quad \ldots (14),$$

und zwar die absoluten Beträge dieser Ausdrücke.

Der Verlauf dieser Beträge ist in Abb. 3 dargestellt in Abhängigkeit von $\frac{1}{2}k\pi$. Während der erstere von 0 ab monoton anwächst, fällt der letztere von ∞ zu 0 herab und steigt erst dann wieder an. Der abfallende Zweig entspricht nach (9) solchen Bewegungen, bei denen je ein Wirbel aus der einen und ein benachbarter aus der anderen Reihe sich um die Mitte ihrer Verbindungslinie drehen; dies dürfte der hauptsächlich in Betracht kommende Störungsfall sein. Wenn man aber zunächst allgemeiner den größeren der beiden Ausdrücke (14) als Labilitätsmaß ansieht, so ist der Schnittpunkt der beiden Kurven als das Minimum anzusehen. Für ihn erhält man: $\mathfrak{Sin}^2\, k\pi = 2$, oder $k\pi = 1{,}15$, $k = 0{,}37$. Da nach dem Vorhergesagten der abfallenden Kurve größere Bedeutung zukommt (im statistischen Sinn!), so kann man wohl k noch etwas größer erwarten, aber jedenfalls noch unterhalb der Nullstelle, die bei $\mathfrak{Sin}\,\frac{1}{2}k\pi = 1$, d. h. $\frac{1}{2}k\pi = 0{,}88$, $k = 0{,}57$ liegt. Diese Verhältniszahlen k liegen in jedem

Falle höher als das Verhältnis 0,28, das bei der Kármánschen Wirbelstraße Stabilität ergäbe. Dies dürfte insofern von Bedeutung sein, als genau in der Mitte der Strömung, wo sich entgegengesetzte Wirbel gegenüberstehen, wohl das letztere Verhältnis maßgebend ist. Es ist daher verständlich, daß die aus der Ähnlichkeitshypothese abgeleiteten Formeln über Mischungsweg und Geschwindigkeitsgradient gerade in der Mitte nicht mehr zutreffen [vgl. [3]]. Als Maß der Labilität bekommt man an dem Schnittpunkt die Ordinate $k\,(A-C)=\frac{1}{2}\,\pi^2\,k\,\sqrt{3}=0{,}3\,\pi^2$, womit jedenfalls die Größenordnung der dynamischen Labilität richtig getroffen sein wird.

Aus unserem dynamischen Ansatz und der eben gefundenen Größenanordnung ergibt sich noch ein wichtiger Hinweis, wenn man auch die Wirkung entfernterer Reihen nach dem Bild von Abb. 1 abschätzen will. Sie würden sich durch Störungskoeffizienten in den Gl. (4) ausdrücken, die aus den in (6) angegebenen entstehen, indem wir dort k und γ durch ihre Vielfachen, $2\,k$, $3\,k\ldots$, $2\,\gamma$, $3\,\gamma\ldots$ ersetzen würden. Für die bisher bevorzugte Störungslänge $\varphi=\pi$ nehmen diese Koeffizienten dann rasch ab, im wesentlichen nach Potenzen

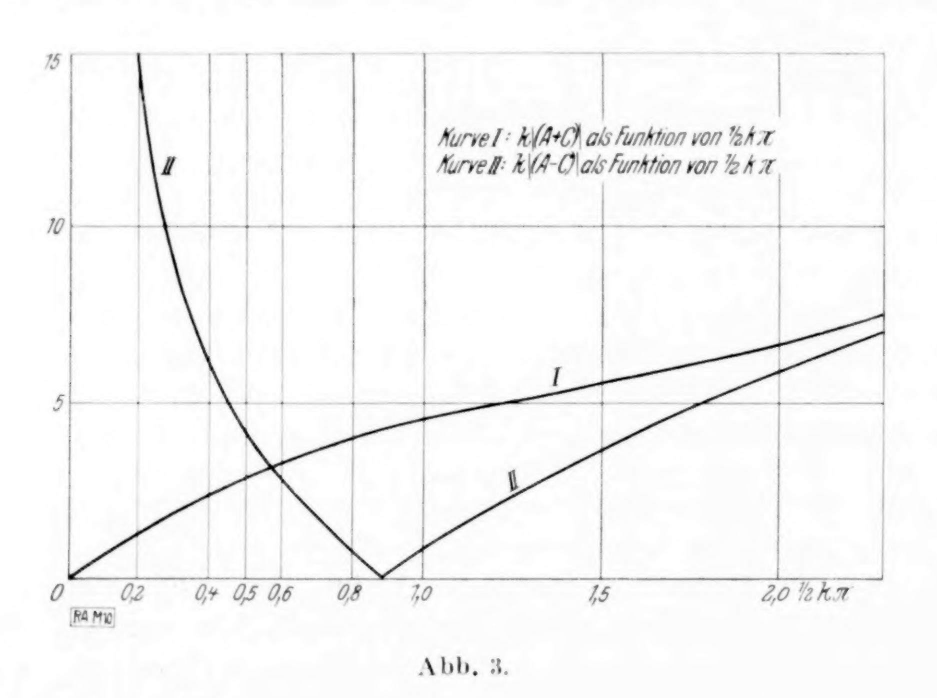


Abb. 3.

von $e^{-k\pi}$, wobei auch noch die Faktoren, die γ enthalten, wechselnde Vorzeichen bedeuten. Deshalb ist hier die „Fernwirkung" gering. Anders aber für große Wellenlängen der Störung, d. h. $\varphi << \pi$. In diesem Fall ist der erste Teil von A [Gl. (6)] nur klein, und wir lassen auch gleich die Glieder fort, die im Nenner Quadrate von $\mathfrak{Sin}$-Funktionen enthalten, weil diese mit Potenzen von $e^{-2k\pi}$ abnehmen. Nach (10) und (12) bleibt dann $C \pm iB$ für die Labilität maßgebend, und zwar das erste Glied dieses Ausdrucks in (6). Dieses nimmt aber jetzt nur mit Potenzen von $e^{-k\varphi}$ ab, also nach der Voraussetzung sehr langsam! Durch Summation der Wirkung von mehreren Reihen kann also hier eine erhebliche Verstärkung des an sich kleinen Gliedes eintreten. Man kann sich ein ungefähres Bild dieser Summenwirkung machen, wenn man sie durch die geometrische Reihe darstellt:

$$\frac{1}{2}\,k\,\pi\,\varphi\cdot 2\,(e^{-k\varphi}+e^{-2k\varphi}+\ldots\ldots)=\frac{k\,\pi\,\varphi}{e^{k\varphi}-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

(bei unendlicher Gliederzahl). Bei kleinen φ-Werten ist dies annähernd gleich π. Trotz der Kleinheit von φ kann also auch hier das Labilitätsmaß infolge der Summation beträchtliche Werte erreichen, die die oben berechneten (von der Größenordnung $0{,}3\,\pi^2$) erreichen oder sogar überschreiten können. Dies hängt noch von der wirklichen Reihenzahl (Restglied der geometrischen Reihe!) und der Größe von φ ab. Jedenfalls kann man daraus schließen, daß es für die Herabsetzung der Labilität günstig ist, wenn die Reihenanzahl eine bestimmbare Grenze nicht überschreitet. Mit anderen Worten heißt das, daß es aus Stabilitätsgründen verständlich ist, wenn sich eine nicht verschwindende, endliche Länge b als „Mischungsweg" einstellt; diese wird, wie es den Beobachtungen entspricht, in bestimmtem Verhältnis zur Kanalbreite stehen (vgl. oben S. 115).

Man sieht zugleich, daß die laminare reibungsfreie Strömung selbst, die der Aufteilung in unendlich viele Wirbelreihen entspräche, in diesem Sinne als labil anzusehen ist, im Gegensatz zu den Ergebnissen der linearen Störungsrechnung, die bekanntlich bis zu beliebig hoher Reynoldsscher Zahl Stabilität ergeben haben. M 10

Korrelationsmessung auf Grund der Summenfunktion.

Von *H. Pollaczek-Geiringer* in Berlin.

Gegenüber der Angabe einer diskreten (oder arithmetischen) Verteilung durch die Einzelwahrscheinlichkeiten $\mathfrak{v}(x)$ mit der Summe 1 bzw. einer kontinuierlichen (oder geometrischen) Verteilungsdichte $v(x)$ mit dem Integral 1, bietet die Bestimmung einer beliebigen Verteilung durch die sogenannte Summenfunktion $V(x)$ den Vorteil einheitlicher Verwendbarkeit. $V(x)$ bedeutet dabei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Beobachtungsergebnis kleiner oder gleich x ist. Diese Begriffe entsprechen den mechanischen der diskreten Massenpunkte, der Massendichte, der Gesamtmasse. Ist insbesonders eine zweidimensionale Verteilung durch die Summenfunktion $V(x, y)$ gegeben, so können damit sehr allgemeine Arten der Verteilung umfaßt werden. Es können z. B. Bereiche mit kontinuierlicher zweidimensionaler Dichte auftreten, Kurven mit eindimensionaler Dichte, Punkte als Träger von Einzelwahrscheinlichkeiten alles in beliebiger Kombination und Anordnung.

In einem Seminar unseres Instituts hat Herr v. Mises, ausgehend von den eben genannten und noch weiteren Vorteilen der Summenfunktion, die Aufgabe gestellt, ein auf der Summenfunktion basierendes Korrelationsmaß anzugeben, das die sogleich zu berührenden Nachteile der bekannten Maße möglichst vermeidet. Ein solches Maß wird gewiß allgemein anwendbar sein. Dies ist allerdings auch der klassische Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{s_{12}}{s_{11}\, s_{22}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(I)},$$

wobei s_{11}^2, s_{22}^2, s_{12} die auf den Schwerpunkt bezogenen zweiten Momente der Verteilung bezeichnen. Doch hat dieses Maß den für viele Fälle entscheidenden Nachteil, daß es die Extremwerte $+1$ bzw. -1 nur bei linearer funktionaler Abhängigkeit annimmt. Bei nicht linearer funktionaler Abhängigkeit kann sogar der Wert 0 angenommen werden, was eigentlich den diametral entgegengesetzten Fall der Unabhängigkeit charakterisieren sollte[1]).

Von diesen Nachteilen frei ist das Pearsonsche Kontingenzmaß f^2, welches aber wieder nur für arithmetische Verteilungen erklärt ist. Gibt man eine solche durch ihre $\mathfrak{v}(x, y), (x = 0, 1, \ldots k, y = 0, 1 \ldots k)$, bezeichnet mit $\mathfrak{v}_1(x) = \sum\limits_y \mathfrak{v}(x, y)$ bzw. $\mathfrak{v}_2(y) = \sum\limits_x \mathfrak{v}(x, y)$ die Spalten- bzw. Zeilensummen, die sämtlich ungleich Null vorauszusetzen sind, so erklärt man

$$f^2 = \frac{1}{k-1} \cdot \sum_{x\,y} \frac{(\mathfrak{v}(x, y) - \mathfrak{v}_1(x)\,\mathfrak{v}_2(y))^2}{\mathfrak{v}_1(x)\,\mathfrak{v}_2(y)} = \frac{1}{k-1} \cdot \left[\sum_{x\,y} \frac{(\mathfrak{v}(x\,y))^2}{\mathfrak{v}_1(x)\,\mathfrak{v}_2(y)} - 1\right] = \frac{1}{k-1} \cdot \left[S - 1\right] \quad . \quad \text{(II)}.$$

Gelegentlich wird auch

$$g^2 = \frac{k}{k-1}\,\frac{S-1}{S} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{(II')}$$

an Stelle von f^2 verwendet. f^2 sowie g^2 liegen zwischen 0 und 1, werden dann und nur dann 0, wenn Unabhängigkeit, dann und nur dann $+1$, wenn funktionale Abhängigkeit in dem Sinne besteht, daß es zu jedem x ein und nur ein y mit von Null verschiedener Wahrscheinlichkeit gibt. Ist die arithmetische Verteilung in einem Rechteck gegeben ($x = 0, 1, \ldots k$, $y = 0, 1, \ldots l$) mit $l < k$, so wird merkwürdigerweise in Anlehnung an Tschuprow meist an Stelle von $\frac{1}{k-1}$ in f^2 der Faktor $\frac{1}{\sqrt{(k-1)(l-1)}}$ gesetzt. Es wäre aber richtiger, den Faktor $\frac{1}{l-1}$ zu setzen, da, wie man sofort sieht, $S \leqq l$ ist. Denn da $\frac{\mathfrak{v}(x, y)}{\mathfrak{v}_1(x)} \leqq 1$ ist, so gilt:

$$S = \sum_{x,\,y} \frac{(\mathfrak{v}(x, y))^2}{\mathfrak{v}_1(x)\,\mathfrak{v}_2(y)} \leqq \sum_y \frac{1}{\mathfrak{v}_2(y)} \cdot \sum_x \mathfrak{v}(x, y) = \sum_y \frac{\mathfrak{v}_2(y)}{\mathfrak{v}_2(y)} = l.$$

Es würde daher bei der kritisierten Tschuprowschen Definition der Wert 1 für f^2 niemals erreicht. Einer Erweiterung der Definition von f^2 oder g^2 auf allgemeine Verteilungen mittels Lebesgue-Stieltjesscher Integrale stehen Schwierigkeiten entgegen, die eine befriedigende Erledigung wohl kaum gestatten. Auf andere Korrelationsmasse gehe ich hier nicht ein.

1. Definition des neuen Maßes[2]). Dieses stellt eine Lösung der eingangs gestellten Aufgabe dar. Wie auch immer eine Wahrscheinlichkeitsverteilung (eine Massenverteilung) beschaffen sei, stets kann man zu jedem Punkt $p(x, y)$ der Ebene folgende vier Zahlen rechnen: Zieht man durch p eine horizontale Gerade $\xi = x$ und eine vertikale $\eta = y$, so bedeute

[1]) Die nähere Erläuterung dieser Begriffe folgt in Abschn. 1.
[2]) Diese habe ich ohne irgendwelche Beweise auf dem Mathematikerkongreß in Zürich 1932 mitgeteilt. (Verh. d. Int. Math. Kongr. Zürich 1932. II. Bd., S. 229.)

$A(x, y) = V(x, y)$ die Gesamtmasse „links unten", also im Bereich $-\infty < \xi \leqq x; -\infty < \eta \leqq y$. Analog sei $D(x, y)$ die Gesamtmasse „rechts oben" $x < \xi < \infty$, $y < \eta < \infty$, $C(x, y)$ die „rechts unten" $x < \xi < \infty$; $-\infty < \eta \leqq y$, $B(x, y)$ die „links oben" $-\infty < \xi \leqq x$; $y < \eta < \infty$. Ferner schreiben wir $V_1(x)$ für die Gesamtmasse „links" von $\xi = x$, also $V_1(x) = V(x, \infty) = A + B$, und analog $V_2(y) = V(\infty, y) = A + C$ für die Gesamtmasse „unterhalb" $\eta = y$.

Sodann bilden wir für einen beliebigen Punkt $p(x, y)$:

$$V - V_1 V_2 = A - (A + B)(A + C) = A(1 - B - C - A) - BC = AD - BC \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

1. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $V(x, y)$ in ein Produkt zweier Verteilungen von x bzw. y allein zerfällt (Fall der Unabhängigkeit) $V(x, y) = W_1(x) \cdot W_2(y)$. Setzt man hier für $x = +\infty$, so folgt:

$$V(\infty, y) = W_1(\infty)\, W_2(y) = 1 \cdot W_2(y) \text{ somit } W_2(y), = V(\infty, y) = V_2(y)$$

und ebenso $W_1(x) = V_1(x)$, also ist im Falle der Unabhängigkeit

$$V(x, y) = V_1(x) \cdot V_2(y), \text{ also } AD - BC = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

2. Ferner ist bei beliebigem V sicher für jedes x, y

$$-1 \leqq \frac{AD - BC}{AD + BC} \leqq +1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

weil A, B, C, D jedes $\geqq 0$. Der Quotient wird -1 bzw. $+1$ dann und nur dann, wenn $AD = 0$, $BC > 0$ bzw. $BC = 0$, $AD > 0$.

3. Nun nehmen wir an, daß alle Wahrscheinlichkeit (in Form einer Kurvendichte oder in Form von Einzelmassen oder in beliebiger anderer Kombination) auf einer monoton nicht abnehmenden Kurve konzentriert sei. Genau gefaßt soll das heißen, daß es nirgends in der Ebene zwei Punkte $p(x, y)$ und $p'(x', y')$ gibt, derart, daß man, bei beliebig klein vorgegebenen ε, um jeden von beiden ein Quadrat von der Seitenlänge ε angeben kann, innerhalb dessen sich eine positive Gesamtmasse befindet, sofern $x' > x$ aber $y' < y$. Dann ist (vgl. Abb. 1) für alle Punkte der Ebene $AD > 0$, und $BC = 0$, also der Bruch in (3) gleich $+1$. Ist hingegen in analoger Weise alle Wahrscheinlichkeit auf einer monoton nicht zunehmenden Trägerkurve vereinigt, so wird dieser Bruch gleich -1.

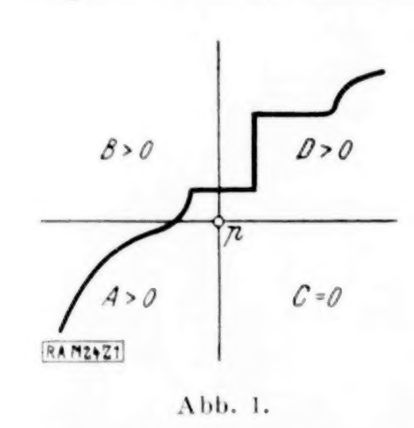


Abb. 1.

Dies vorausgeschickt, bilden wir den Ausdruck

$$F = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(AD - BC)\,dx\,dy}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(AD + BC)\,dx\,dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Zunächst liegt, nach dem Vorstehenden, F stets zwischen -1 und $+1$.

Als Zweites zeigen wir, daß F dann und nur dann den Wert $+1$ annimmt, wenn die ganze Wahrscheinlichkeit auf einer monoton nicht abnehmenden Kurve konzentriert ist. Ist dies letztere der Fall, so war bereits festgestellt, daß überall $AD > 0$, $BC = 0$; also ist überall der Integrand des Zählers von F gleich dem des Nenners, also $F = +1$. — Ist umgekehrt $F = +1$, so gibt es zunächst gewiß kein noch so kleines Quadrat q, für dessen sämtliche Punkte $BC > 0$. Denn gäbe es ein solches, so würde für all dessen Punkte der Integrand des Zählers von F kleiner als der des Nenners ausfallen, und da er anderseits gewiß nirgends größer werden kann als der des Nenners, so könnte F nicht gleich $+1$ sein. Wäre nun nicht die ganze Verteilung auf einer monoton nicht abnehmenden Kurve konzentriert, so gäbe es irgendwo zwei Punkte $p(x, y)$, $p'(x', y')$ mit $x' > x$, $y' < y$, derart, daß in beliebig enger Umgebung jedes der Punkte sich positive Masse befände. Dann betrachte man den Halbierungspunkt $\bar{p}$ der Strecke p, p'. Um $\bar{p}$ als Mittelpunkt könnte man ein so kleines Quadrat q zeichnen, daß es weder p noch p' enthält. Für alle Punkte von q wäre dann $BC > 0$, da p „links oben", p' „rechts unten" zu jedem Punkt von q liegt. Dies ist aber unvereinbar mit $F = +1$. Es gibt also nirgends zwei solche Punkte p und p', d. h. die ganze Verteilung liegt auf einer monoton nicht abnehmenden Kurve. Auf genau entsprechende Weise sieht man ein, daß F dann und nur dann den Wert -1 annimmt, wenn die ganze Verteilung auf einer monoton nicht zunehmenden Kurve liegt.

Vergleicht man für den Spezialfall der arithmetischen Verteilung dies mit dem Verhalten des Pearsonschen f^2 (vgl. (II)), welches dann und nur dann $+1$ wird, wenn zu jedem x ein und nur ein mit Masse belegtes y gehört, so sieht man, daß hier zwei recht verschiedene Begriffe „funktionaler Abhängigkeit" vorliegen. Abb. 2 zeigt zwei arithmetische Verteilungen, für die — unabhängig von den Größen der Einzelwahrscheinlichkeiten — jeweils das eine Maß gleich, das andere ungleich Eins ausfällt.

An dritter Stelle untersuchen wir das Verschwinden von F. Zunächst verschwindet F im Falle der Unabhängigkeit, d. h. wenn (2) gilt. Außerdem kann aber F auch aus andern Gründen verschwinden, nämlich zufolge gewisser Symmetrieeigenschaften. Ein lehrreiches Beispiel dafür bietet die — zur Geraden $y = x$ symmetrische — arithmetische Verteilung mit $\mathfrak{v}(0,0) = 1/9$, $\mathfrak{v}(1,2) = \mathfrak{v}(2,1) = 4/9$, sonst überall $\mathfrak{v} = 0$. Dies ist eine Verteilung vom Typus der Abb. 2a. Zu jedem x gibt es ein und nur ein mit Masse belegtes y, trotzdem wird F sogar Null, ebenso wie auch r. Aber f^2 würde hier $+1$ geben. — v. Mises hat ein Beispiel gegeben, wo r beliebig an 0 kommt bei einer arithmetischen Verteilung, die ganz auf einer monoton abnehmenden Kurve liegt (einem Hyperbelast). Für dieses Beispiel würde $f^2 = +1$, $F = -1$. — Will man das Null-Werden von F auf das Eintreten des Produkt-Zerfallens (1) der Verteilung beschränken, so muß man auf das Vorzeichen des Maßes verzichten und etwa

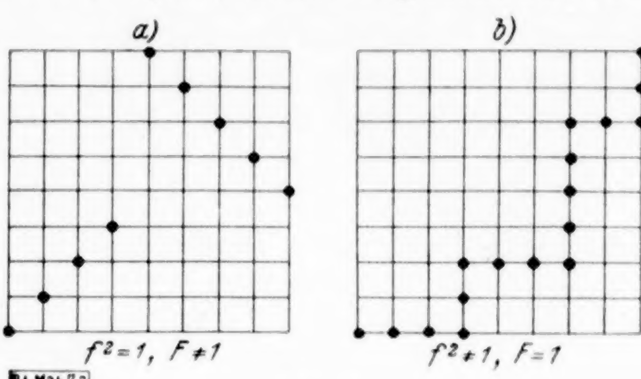


Abb. 2.

$$G^2 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(AD - BC)^2\,dx\,dy}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(AD + BC)^2\,dx\,dy} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4')$$

einführen. Dann wird für unsere Beispiele $G^2 = +1$, genau so wie f^2. Es gibt da m. E. keine allgemein bindenden Gesichtspunkte für die Bevorzugung der einen oder anderen Verhaltungsweise. Mit einer einzigen Zahl kann man ja auf keine Weise allen Feinheiten gerecht werden. Es kommt da nur darauf an, die Verhaltungsweisen der verschiedenen Maße genau zu kennen, um falsche Schlüsse zu vermeiden. Gelegentlich wird man auch für dasselbe Material mehrere Maße rechnen! Wir wollen hier (4) nicht weiter verfolgen, da es für die Rechnung unbequemer ist und die Vorzüge nicht entscheidend scheinen.

3. Anwendung. Wir zeigen die Berechnung von F an dem Fall der Doppelalternative (Bernoullische Korrelation) und an der Gaußschen Verteilung (Normalkorrelation).

I. In den vier Punkten (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1) seien die Wahrscheinlichkeiten $\mathfrak{v}_{00}$, $\mathfrak{v}_{10}$, $\mathfrak{v}_{01}$, $\mathfrak{v}_{11}$ mit der Summe 1. Die ganze Ebene teilen wir in zwei Gebiete I und II. Jenes umfasse das Innere des Quadrates (0, 0, ... 1, 1) sowie dessen beide vom Nullpunkt ausgehende Seiten, dieses die ganze übrige Ebene. Für jeden Punkt von II ist sowohl $AD = 0$ wie auch $BC = 0$. In I ist überall $A = \mathfrak{v}_{00}$, $D = \mathfrak{v}_{11}$, also das Doppelintegral von AD über dieses Quadrat vom Flächeninhalt 1 gleich $\mathfrak{v}_{00} \cdot \mathfrak{v}_{11} \cdot 1 = \mathfrak{v}_{00}\,\mathfrak{v}_{11}$. Somit ist

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} AD\,dx\,dy = \mathfrak{v}_{00}\,\mathfrak{v}_{11} \quad \text{und ganz analog} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} BC\,dx\,dy = \mathfrak{v}_{10}\,\mathfrak{v}_{01}\,.$$

Es gilt also für die Doppelalternative

$$F = \frac{\mathfrak{v}_{00}\,\mathfrak{v}_{11} - \mathfrak{v}_{01}\,\mathfrak{v}_{10}}{\mathfrak{v}_{00}\,\mathfrak{v}_{11} + \mathfrak{v}_{01}\,\mathfrak{v}_{10}} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (5).$$

An diese Berechnung knüpfen wir noch zwei Bemerkungen: Es zeigt sich hier ein weiterer wesentlicher Unterschied gegen das Kontingenzmaß f^2: Dieses ist unabhängig gegen eine Anamorphose der Koordinaten $\xi' = \xi'(\xi)$; $\eta' = \eta'(\eta)$, d. h. im arithmetischen Fall gegen eine beliebige Umnumerierung, die z. B. an Stelle der ξ-Koordinaten $0, 1, \ldots n$ deren Quadrate $0, 1, \ldots, n^2$ setzt. Diese ganz andere Verteilung ergibt das gleiche f^2. F hingegen ist im allgemeinen abhängig vom Koordinatensystem, genau wie r. Auch hier bleibt es offen, welche der beiden Verhaltungsweisen „vorzuziehen" ist.

Ebenso wie wir hier die Größen AD und BC nur für das Quadrat (0, 0 ... 1, 1) rechnen mußten, können wir bei beliebiger in einem begrenzten Ebenenteil gelegenen Verteilung diese stets in ein Rechteck so einschließen, daß das Außengebiet dieses Rechtecks keinen Beitrag zu F liefert, wie Abb. 3 das andeutet.

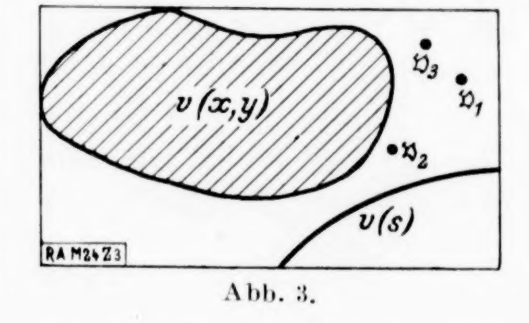


Abb. 3.

II. Wir berechnen zum Schluß das neue Maß für die Gaußsche Verteilung, was eine an und für sich hübsche Integrationsaufgabe darstellt. Gesucht ist zunächst

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} A(x,y)\,D(x,y)\,dx\,dy \quad \text{mit} \quad A = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\varphi(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta; \quad D = \int_{x}^{+\infty}\int_{y}^{+\infty}\varphi(\xi'\,\eta')\,d\xi'\,d\eta',$$

also im Ganzen $$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} d\,x\,d\,y \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi(\xi,\eta)\,d\,\xi\,d\,\eta \int_{x}^{\infty}\int_{y}^{\infty} \varphi(\xi',\eta')\,d\,\xi'\,d\,\eta' \quad \text{(a)}.$$

Um die Integration nach x, y auszuführen, überlegt man, daß x, y stets zwischen den Punkten $p(\xi,\eta)$ und $p'(\xi',\eta')$ liegen muß, derart, daß $\xi \leqq x \leqq \xi'$; $\eta \leqq y \leqq \eta'$. Hält man dann p und p' fest, so überstreicht der Punkt (x, y) die Fläche $(\xi' - \xi)\cdot(\eta' - \eta)$. Es geht also das sechsfache Integral (a) über in das vierfache:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,\eta)\,d\,\xi\,d\,\eta \int_{\xi}^{\infty}\int_{\eta}^{\infty} (\xi' - \xi)\cdot(\eta' - \eta)\,\varphi(\xi',\eta')\,d\,\xi'\,d\,\eta' \quad \text{(b)}.$$

Nun führen wir neue Variable ein:

$$\frac{\xi' - \xi}{2} = u, \qquad \frac{\eta' - \eta}{2} = v, \qquad \frac{\xi' + \xi}{2} = u', \qquad \frac{\eta' + \eta}{2} = v' \quad \text{(c)}$$

Es durchläuft dann u', v' bei der in (b) auszuführenden Integration alle Werte $-\infty$ bis $+\infty$, während die u, v nur von 0 bis $+\infty$ variieren, da stets $\xi' \geqq \xi$; $\eta' \geqq \eta$. Also erhält man:

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(u' - u, v' - v)\,\varphi(u' + u, v' + v)\cdot 4\,u\,v\,d\,u\,d\,v\,d\,u'\,d\,v' \quad \text{(d)}.$$

Von jetzt an erst benutzen wir die besondere Gestalt von $\varphi(u, v)$ als Gaußsche Verteilung

$$\varphi(u, v) = C\,e^{-\frac{1}{2}(\alpha u^2 + 2\beta u v + \gamma v^2)} = C\,e^{-q(u,v)}; \quad C = \frac{\sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}}{\pi}.$$

Es ist

$$\varphi(u' - u, v' - v)\cdot\varphi(u' + u, v' + v) = [\varphi(u, v)\cdot\varphi(u', v')]^2 = \frac{2\,C\,e^{-2q(u,v)}\cdot 2\,C\,e^{-2q(u' v')}}{4}.$$

Es geht somit (d) über in

$$2\,C\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} u\,v\,e^{-2q(u,v)}\,d\,u\,d\,v \cdot 2\,C\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2q(u' v')}\,d\,u'\,d\,v' = 2\,C\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} u\,v\cdot e^{-2q(u v)}\,d\,u\,d\,v \quad \text{(e)}.$$

Es ist also nur noch das letzte Integral auszuwerten. Zu diesem Zwecke setzt man $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ und erhält, abgesehen von der Konstanten

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2(\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi)}\cdot r^3\sin\varphi\cos\varphi\,d\,r\,d\,\varphi \quad \text{(f)}.$$

Setzt man zur Abkürzung $\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi = h^2$; und $r h = r'$, so kommt, da $r^3\,d\,r = 1/h^4\cdot r'^3\,d\,r'$ zunächst:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-r^2 h^2}\,r^3\,d\,r = \frac{1}{h^4}\int_{0}^{\infty} e^{-r'^2}\,r'^3\,d\,r' = \text{Const}\cdot\frac{1}{h^4},$$

und somit reduziert sich (f) auf

$$\text{Const}\cdot\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(\alpha\cos^2\varphi + 2\beta\sin\varphi\cos\varphi + \gamma\sin^2\varphi)^2}\,d\,\varphi \quad \text{(g)}.$$

Setzt man $\operatorname{tg}\varphi = z$, so erhält man, abgesehen von Konstanten,

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{\sin\varphi/\cos\varphi}{(\alpha + 2\beta\operatorname{tg}\varphi + \gamma\operatorname{tg}^2\varphi)^2}\,d\,\varphi = \int_{0}^{\infty} \frac{z\,d\,z}{(\alpha + 2\beta z + \gamma z^2)^2} = \text{Const}\left[\delta - \beta\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\delta}\right)\right] \quad \text{(h)}.$$

Rechnet man in der gleichen Weise das

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B\,C\,d\,x\,d\,y,$$

so unterscheiden sich die Resultate nur durch das Vorzeichen von β

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} B\,C\,d\,x\,d\,y = \text{Const}\left[\delta + \beta\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}\frac{\beta}{\delta}\right)\right] \quad \text{(h')}$$

und man erhält schließlich, da die Konstante herausfällt,

$$F = \frac{\iint (A\,D - B\,C)\,d\,x\,d\,y}{\iint (A\,D + B\,C)\,d\,x\,d\,y} = -\frac{\pi\beta}{2\left(\delta + \beta\operatorname{arctg}\frac{\beta}{\delta}\right)} \quad \text{(6)}.$$

Ist hier insbesondere $\beta = 0$, so wird $F = 0$ (Unabhängigkeit), ist $\delta = 0$ (funktionale Abhängigkeit), so wird $F = -\pi\beta/2\beta\cdot\frac{\pi}{2} = -1$. Man verifiziert auch leicht, daß für alle möglichen β und δ das durch (6) gegebene $|F| \leqq 1$ ist.

M 24

Qualitatives über Wärmeausgleich.

Von *G. Pólya* in Zürich.

Der Mathematiker, der an eine physikalische Theorie herantritt, hat mehrere Aufgaben. Er soll entscheiden, ob die sich aus der Theorie ergebenden mathematischen Probleme lösbar und ob sie eindeutig lösbar sind. Diese Untersuchung ist wesentlich, um den inneren Zusammenhalt der Theorie, ihre „Übereinstimmung mit sich selbst" zu beurteilen. Er soll vor allem bestimmte quantitative Folgerungen aus der Theorie ziehen. Solche Folgerungen sind unerläßlich, um die Übereinstimmung der Theorie mit den Experimenten zu beurteilen. Er soll jedoch ferner, wenn er nur vermag, auch allgemeine qualitative Folgerungen aus der Theorie ziehen. Solche Folgerungen sind nützlich, um die Übereinstimmung der Theorie mit unseren allgemeinen Eindrücken von den Erscheinungen, mit unseren sogenannten „instinktiven Auffassungen" zu beurteilen.

Der vorliegende kleine Aufsatz verfolgt die letztgenannte, qualitative Forschungsrichtung, die heutzutage m. E. neben den beiden vorgenannten zu sehr zurücktritt [1]). Ich beschäftige mich mit einem Resultat von Ch. Sturm, das, obzwar es in einer vielbeachteten, klassischen Arbeit steht [2]), heute ziemlich in Vergessenheit geraten zu sein scheint. Sturm untersucht die Wärmebewegung in einem linearen, von beiden Seiten begrenzten Leiter, der mit seiner Umgebung von konstanter Temperatur Null in Wärmeaustausch steht; er stellt den Satz auf, daß die Anzahl der Nullstellen der Temperaturverteilung (d. h. der Übereinstimmungspunkte mit der Außentemperatur) im Laufe der Zeit nie zunimmt. Dieser Satz steht im Einklang mit der Vorstellung, daß die Temperaturverteilung sich mit Fortschreiten der Zeit vereinfacht, glättet. Dieser Sturmsche Satz ist als eine qualitative Bestätigung der Fourierschen Wärmeleitungstheorie zu bewerten: Was von vornherein als plausibel angesehen werden könnte, erweist sich hier als eine notwendige Folgerung der Theorie.

Das Ziel der nachfolgenden Zeilen ist, einige Spezialfälle, oder besser Grenzfälle, des erwähnten Sturmschen Satzes auf neuem Wege zu bestätigen. Die Überlegung von Sturm, die man den heutigen Anforderungen an Strenge wohl angleichen könnte, stützt sich direkt auf die Differentialgleichung der Wärmeleitung. Meine nachfolgende Überlegung stützt sich auf wohlbekannte explizite Darstellungen der in Betracht kommenden Lösungen und auf allgemeine Sätze über reelle Nullstellen, die vielleicht an und für sich einiges Interesse beanspruchen können [3]).

1. Wir betrachten zuerst einen kreisförmig geschlossenen, homogenen, linearen Leiter vom Umfang 2π (einen homogenen Drahtring vom Radius 1), der mit seiner Umgebung, die die konstante Temperatur 0 hat, mittels Strahlung in Wärmeaustausch steht. Die Temperatur v genügt der Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - h v.$$

Hierin sind k und h positive Konstanten, t ist die Zeit, x der entlang des Leiters gemessene Abstand, $x = 0$ und $x = 2\pi$ entsprechen demselben Punkt. Die Lösung ist [4])

$$v = v(x,t) = \left[A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n x + B_n \sin n x)\, e^{-k n^2 t}\right] e^{-h t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Die Konstanten A_n, B_n sind dadurch bestimmt, daß die Reihe rechts für $t = 0$ sich auf die Fouriersche Reihe der Anfangstemperaturverteilung $v(x, 0)$ reduzieren muß. Wir haben nur so viel (oder auch weniger) zu benutzen, daß die A_n, B_n eine beschränkte Zahlenfolge bilden.

Es seien t_1, t_2 zwei Zeitpunkte, $0 < t_1 < t_2$. Wir haben miteinander zu vergleichen die Anzahl der Nullstellen der beiden Funktionen $v(x, t_1)$ und $v(x, t_2)$. Setzen wir

$$A_n e^{-k n^2 t_2} = a_n, \qquad B_n e^{-k n^2 t_2} = b_n, \qquad k(t_2 - t_1) = \tau.$$

[1]) Eine ähnliche Tendenz verfolgten zwei früher in dieser Zeitschrift erschienene Aufsätze, Bd. 10 (1930), S. 353 bis 360 und Bd. 11 (1931), S. 445 bis 449.

[2]) Ch. Sturm, Journal de Math. pures et appliquées, Bd. 1 (1836), S. 373 bis 444; vgl. insbesondere S. 413 bis 431.

[3]) Der vorliegende Aufsatz bildet nur einen Ausschnitt aus einer größeren, gemeinsam mit Herrn Szegö ausgeführten Untersuchung; vgl. die Ankündigung in den Comptes Rendus, Bd. 192 (1931), S. 1340 bis 1342.

[4]) Fourier, Théorie analytique de la chaleur (Paris 1822). Vgl. S. 272.

Dann werden $v(x, t_2) e^{h t_2}$ und $v(x, t_1) e^{h t_1}$ bzw. durch die Reihen

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) e^{n^2 \tau} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

dargestellt, es ist $\tau > 0$, und die Reihe (3) hat so stark abnehmende Glieder, daß mit einem passenden konstanten C

$$|a_n| e^{n^2 \tau} < C e^{-n t_1}, \quad |b_n| e^{n^2 \tau} < C e^{-n t_1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

besteht. Ich will hieraus beweisen, daß $v(x, t_1)$ (entspricht der Reihe (3) und dem früheren Zeitpunkt t_1) nicht weniger Nullstellen haben kann, als $v(x, t_2)$ (entspricht der Reihe (2) und dem späteren Zeitpunkt t_2). Ich habe also folgendes zu zeigen:

Hilfssatz I. Gibt es positive Zahlen C und t_1, so beschaffen, daß die Ungleichungen (4) für $n = 1, 2, 3, \ldots$ bestehen, und ist τ positiv, so ist die Anzahl der Nullstellen der Reihe (3) nicht kleiner als die Anzahl der Nullstellen der Reihe (2).

Unter der Anzahl der Nullstellen einer reellen periodischen Funktion $f(x)$ von der Periode 2π wird dabei verstanden die Anzahl aller Nullstellen in einem Intervall $(a, a + 2\pi)$, wobei $f(a) \neq 0$ ist; die Nullstellen sind mit Multiplizität zu zählen. Diese Definition ist, wie leicht ersichtlich, unabhängig von der Wahl der Stelle a.

$e^{n^2 \tau}$, mit $\tau > 0$, soll also ein Faktor sein, der dem n-ten Glied einer Fourierreihe angehängt, die Fourierreihe einer neuen Funktion mit nicht weniger Nullstellen entstehen läßt, kurzum ein nullstellenvermehrender Faktor. Ich werde $e^{n^2 \tau}$ als Grenzwert einfacherer Faktoren von derselben Natur darstellen.

Es sei $f(x)$ eine (genügend reguläre, etwa analytische) reelle Funktion, a eine reelle Zahl, $a \neq 0$ und

$$f_1(x) = a f(x) + f'(x) = (a + D) f(x);$$

D ist das Symbol des Differenzierens nach x. In der Nähe einer Nullstelle von $f(x)$ hat $f_1(x)$ das Vorzeichen von $f'(x)$, und hieraus folgt (man betrachte die Kurve $y = f(x)$): Wenn $f(x)$ im Innern eines Intervalles von 0 verschieden ist und an den beiden Enden verschwindet, so hat $f_1(x)$ im Intervallinnern eine ungerade Anzahl von Nullstellen, also mindestens eine Nullstelle. In einem Punkte, wo $f(x)$ mit der Multiplizität m verschwindet, verschwindet $f_1(x)$ mit der Multiplizität $m - 1$. Hieraus folgt weiter: Wenn $f(x)$ an den beiden Endpunkten eines Intervalles von 0 verschieden ist und im Innern N Nullstellen hat, so hat daselbst $f_1(x)$ mindestens $N - 1$ Nullstellen (die Nullstellen mit Multiplizität gerechnet)[5]. Wenn nun weiter $f(x)$ periodisch von der Periode 2π und $f(a) \neq 0$ ist, so hat $f(x)$ im Intervalle $(a, a + 2\pi)$ eine gerade Anzahl $N = 2n$ von Nullstellen. Nun ist $f_1(x)$ auch periodisch; somit hat $f_1(x)$ einerseits mindestens $2n - 1$, andererseits eine gerade Anzahl von Nullstellen, also hat $f_1(x)$ nicht weniger Nullstellen als $f(x)$.

Wenden wir diesen Satz zweimal an, einmal mit a, einmal mit $-a$; wir erhalten, daß auch

$$f_2(x) = (a - D)(a + D) f(x) = (a^2 - D^2) f(x)$$

nicht weniger Nullstellen hat als $f(x)$. Wenn $f(x)$ durch die Reihe (2) dargestellt ist, so wird $f_2(x)$ durch

$$a^2 a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x)(a^2 + n^2)$$

dargestellt: Der Faktor $a^2 + n^2$ ist also im vorherbesagten Sinne „nullstellenvermehrend". Wenden wir diesen Satz k mal an, dividieren wir durch a^{2k}, und setzen wir nachher $k a^{-2} = \tau$. Wir erhalten, daß auch die Reihe

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n x + b_n \sin n x) \left(1 + \frac{\tau n^2}{k}\right)^k \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

nicht weniger Nullstellen hat als (2).

[5]) Vgl. z. B. G. Pólya und G. Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Springer 1925), Bd. II, S. 38 bis 40 und S. 222 bis 224.

Hieraus ergibt sich der ausgesprochene Hilfssatz I für $k \to \infty$. Zur säuberlichen Durchführung des Grenzüberganges ist die Voraussetzung (4) zu benutzen. Sie hat zur Folge, daß die Reihe (5) nicht nur für reelle Werte von x, sondern in einem ganzen, von der reellen Achse halbierten Parallelstreifen der komplexen x-Ebene gegen die Reihe (3) strebt; jetzt können klassische Hilfssätze der Funktionentheorie[6]) zur vollen Erhärtung des Hilfssatzes I herangezogen werden.

Wir haben somit bewiesen, daß die Anzahl der Nullstellen der Reihe (1) mit wachsendem t nie zunehmen, also nur abnehmen oder unverändert bleiben kann. Nun wird irgendein partieller Differentialquotient $\frac{\partial^{k+l} v}{\partial x^k \partial t^l}$ durch eine Reihe von derselben Form dargestellt, nur die Koeffizienten A_n, B_n werden durch andere Werte ersetzt. Wir haben also folgenden Satz bewiesen, der unsere Vorstellung von der fortschreitenden Ausgleichung oder „Ausglättung" des Temperaturverlaufs in bemerkenswerter Weise präzisiert:

Es soll $v = v(x,t)$ die Temperatur in einem linearen, kreisförmig geschlossenen, homogenen Leiter darstellen, der mit seiner Umgebung von konstanter Temperatur 0 in Wärmeaustausch steht. Die Anzahl der Stellen des Leiters (der x-Stellen), an welchen v verschwindet, kann mit fortschreitender Zeit nur abnehmen oder konstant bleiben, nie zunehmen, und dasselbe gilt für alle partiellen Ableitungen von v, wie z. B. für $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$.

2. Die Wärmeleitungsgleichung im Raume wollen wir in der Gestalt

$$2\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$$

schreiben (für eine Materialkonstante wurde, etwa durch passende Wahl der Einheiten, ein numerischer Wert angenommen). Wir wollen die drei einfachsten Sonderfälle betrachten, in welchen bzw.

1. die auf die x-Achse senkrechten Ebenen,
2. die Kreiszylinder um die z-Achse,
3. die Kugeln mit dem Mittelpunkt $(0, 0, 0)$

die Niveauflächen der Temperatur v bilden. Unter der Voraussetzung, daß die Anfangstemperatur $v(x, y, z, 0)$ nicht zu stark mit der Entfernung vom Koordinatenanfangspunkt anwächst[7]), kann man v in den drei Fällen bzw. durch die Formeln

$$v = \sqrt{\frac{t}{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\lambda} e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \psi(t\lambda)\, d\lambda \quad \ldots \quad (1),$$

$$v = t\, e^{-\frac{r^2}{2t}} \int_0^{\infty} J_0(i r \lambda)\, \lambda\, e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \psi(t\lambda)\, d\lambda \quad \ldots \quad (2),$$

$$v = \sqrt{\frac{t^3}{2\pi}}\, e^{-\frac{r^2}{2t}} \int_0^{\infty} \frac{e^{r\lambda} - e^{-r\lambda}}{r\lambda}\, \lambda^2 e^{-\frac{t\lambda^2}{2}} \psi(t\lambda)\, d\lambda \quad \ldots \quad (3)$$

für $t > 0$ darstellen. In Formel (2) ist $x^2 + y^2 = r^2$, in Formel (3) ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ gesetzt. J_0 ist die wohlbekannte Besselsche Funktion. Es ist

$$J_0(ix) = 1 + \frac{x^2}{2\cdot 2} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 2\cdot 4} + \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2\cdot 4\cdot 6} + \cdots \quad \ldots \quad (4),$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \frac{x^6}{7!} + \cdots \quad \ldots \quad (5).$$

Die Funktion ψ stellt in allen drei Fällen die Anfangstemperatur dar; im Falle (1) ist $\psi(x)$ für $-\infty < x < \infty$, in den Fällen (2), (3) ist $\psi(r)$ für $r > 0$ definiert.

Man kann es der Formel (1) sofort ansehen, daß $v(x,t)$ nicht mehr Nullstellen haben kann als $v(x,0) = \psi(x)$, wenn man das folgende bemerkenswerte Resultat von Laguerre[8]) kennt:

[6]) Vgl. z. B. G. Pólya und G. Szegö, a. a. O., Bd. I, Nr. III 201.

[7]) Genauer: $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1} \log |v|$ strebt mit dem ersten Faktor gegen 0.

[8]) E. Laguerre, Oeuvres (Paris 1898), Bd. I, S. 29. Ein vollständiger Beweis bei G. Pólya und G. Szegö, a. a. O., Bd. II, Nr. V 80.

Hilfssatz II. Es sei $\varphi(x)$ eine reelle Funktion, und das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\lambda}\varphi(\lambda)\,d\lambda = F(x)$$

konvergiere im Intervall $a < x < b$. Die Anzahl der im Intervall $a < x < b$ gelegenen Nullstellen von $F(x)$ kann die Anzahl der Zeichenwechselstellen von $\varphi(x)$ nicht übertreffen.

Man beachte, daß $v - c$ (c konstant), $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \ldots$ sich ebenso durch $\psi - c, \frac{d\psi}{dx}, \frac{d^2\psi}{dx^2}, \ldots$ ausdrücken lassen, wie v durch ψ; man sieht dies entweder durch Zurückformen des Integrals (1) in die üblichere Form

$$v = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\mu^2}{2}}\psi(x+\mu\sqrt{t})\,d\mu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1'),$$

oder direkt aus der Gestalt der Wärmeleitungsgleichung. Ersetzt man noch 0 und $t, t > 0$ durch irgend zwei verschiedene Zeitpunkte, und deutet man den Vorgang ein wenig um, so gelangt man schließlich zur folgenden Aussage:

Es bezeichne $v = v(x,t)$ die Temperatur in einem unendlich ausgedehnten, linearen, homogenen, isolierten Leiter. Die Anzahl derjenigen Stellen des Leiters, in denen die Temperatur einen vorgegebenen Wert annimmt, kann mit fortschreitender Zeit nur abnehmen oder konstant bleiben, nie zunehmen. Dasselbe gilt von der Anzahl derjenigen Stellen, in denen irgendeine partielle Derivierte, wie z. B. $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ einen vorgelegten Wert c annimmt.

Also nimmt die Anzahl der Maxima und Minima, die der Wendepunkte usw. nie zu; man beachte jedoch, daß dies alles nur unter der in Fußnote [7]) auf S. 127 genannten Beschränkung bewiesen wurde.

3. Um ähnliches von den Formeln (2) und (3) der vorangehenden Nr. 2 ablesen zu können, braucht man den folgenden

Hilfssatz III. Es sei

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

eine ganze Funktion mit reellen, nichtnegativen Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$, $\varphi(x)$ eine reellwertige Funktion, und das Integral

$$\int_0^{\infty} G(x\lambda)\varphi(\lambda)\,d\lambda = F(x)$$

für $0 < x < a$ konvergent. Dann hat $F(x)$ im Intervalle $0 < x < a$ höchstens so viele Nullstellen, wie $\varphi(x)$ im Intervalle $0 < x < \infty$ Zeichenwechselstellen.

Zur Anwendung auf Nr. 2 muß man nur beachten, daß die dortigen Reihen (4), (5) stets konvergieren und nichtnegative Koeffizienten haben; bei dieser Anwendung ist $a = \infty$.

Zum Beweis des Hilfssatzes III muß man nur den Fall betrachten, in dem $\varphi(x)$ eine endliche Anzahl von Zeichenwechseln aufweist. In diesem Falle ist es besonders leicht, aus den Voraussetzungen zu zeigen (ich gehe aber darauf hier nicht ein), daß für $0 < x < a$ die Darstellung

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot a_n \int_0^{\infty} \lambda^n \varphi(\lambda)\,d\lambda$$

gilt. Nun ist bekannt[9]),

1. daß die Folge der Momente $\int_0^{\infty} \lambda^n\varphi(\lambda)\,d\lambda$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ nicht mehr Zeichenwechsel aufweist, als die Funktion $\varphi(\lambda)$ selbst;

2. daß die Funktion $F(x)$ — dies ist die erweiterte Descartessche Zeichenregel — nicht mehr Nullstellen für $0 < x < a$ hat, als die Folge ihrer Koeffizienten $a_n\int_0^{\infty} \lambda^n\varphi(\lambda)\,d\lambda$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ Zeichenwechsel aufweist.

Da die a_n nichtnegativ sind, folgt der Hilfssatz III unmittelbar. M 7

[9]) Vgl. G. Pólya und G. Szegö, a. a. O., Bd. II, Nr. V 81 und Nr. V 38.

Ein Gedankenmodell für den Zerreißvorgang spröder Körper.

Von *L. Prandtl* in Göttingen.

1. Problemstellung. Die Vorgänge beim Zerreißen spröder Körper sind bis jetzt viel weniger gut aufgeklärt als diejenigen bei der plastischen Deformation, was hauptsächlich damit zusammenhängt, daß es nur schwer möglich ist, den Akt des Zerreißens genauer zu beobachten. Alles, was man feststellen kann, ist die Belastung, die unmittelbar vor dem Zerreißen geherrscht hat, und die Lage und Form der Bruchfläche. Da beim Zerreißen ein viel kleinerer Teil der Gesamtmasse des Körpers unmittelbar an dem Vorgang beteiligt ist, ist auch die Streuung der Versuchsergebnisse viel größer als bei den plastischen Vorgängen.

Daß das Zerreißen mit einem Labilwerden des bis dahin bestehenden Gleichgewichtszustandes zusammenhängt, ist seit langem die allgemeine Auffassung. Die Versuche, die Zerreißfestigkeit auf Grund bekannter physikalischer Größen aus der molekularen Struktur zu erklären, haben zu Werten für diese Festigkeit geführt, die hundertmal größer sind als diejenigen, die man beim Versuch beobachtet. Die aufschlußreichste Theorie der Vorgänge beim spröden Bruch ist die von A. A. Griffith, der annimmt, daß von vornherein mikroskopische Sprünge in dem Material vorhanden sind, und festsetzt, daß die Sprünge dann weiterreißen, wenn die Abnahme der elastischen Energie beim Weiterreißen gleich ist der bei der Schaffung der neuen Oberflächen gegen die Oberflächenspannung geleisteten Arbeit. Griffith berichtet darüber sehr anschaulich in seinem Referat mit dem Titel: „The theory of rupture" auf dem Delfter Mechanik-Kongreß 1924[1]). Die Zerreißspannung σ_z ergibt sich dabei proportional $\sqrt{\frac{E\,T}{l}}$, wobei E der Elastizitätsmodul, T die Oberflächenspannung und l die Länge des Risses ist, der quer zur Richtung von σ_z angenommen ist. Der Proportionalitätsfaktor ist nach K. Wolf bei reiner Zugbeanspruchung $= \sqrt{\frac{8\,m}{\pi\,(m+1)}}$ ($m =$ Querdehnungszahl), die Oberflächenspannung kann thermodynamisch aus der Verdampfungswärme abgeschätzt werden. Griffith hat sie bei Glas bei höheren Temperaturen unmittelbar gemessen und auf Zimmertemperatur extrapoliert. Schließlich hat er die Formel an künstlich hergestellten Rissen von einigen mm Länge nachgeprüft und gute Übereinstimmung gefunden.

Wenn hier also schon eine physikalisch recht befriedigende Übersicht über die wichtigsten bei den Zerreißvorgängen obwaltenden Beziehungen erreicht ist, so bleibt doch noch Verschiedenes aufzuklären, besonders über den zeitlichen Verlauf der Zerreißvorgänge. Man weiß ja, daß das System der Sprünge bei einer durch eine Einzelkraft auf Biegung beanspruchten Fensterscheibe verschieden ausfällt, je nachdem es sich um ruhigen Druck oder durch langsamen Wurf mit einem großen Stein oder um den raschen Wurf eines kleinen Steines handelt. Wieweit das verschiedene Bild durch Schwingungen der Scheibe beeinflußt wird, ist natürlich schwer zu sagen. Es lohnt sich aber auch ohnedies, die Frage zu untersuchen, ob die Zerreißspannung dieselbe ist, wenn die Zeit, während deren die Belastung gewirkt hat, das eine Mal 1 Minute und das andere Mal $^1/_{100}$ Sekunde war. Nach den entsprechenden Vorgängen bei der plastischen Deformation muß man einen solchen Zeiteinfluß erwarten. Ich hatte auch selbst früher einmal Gelegenheit, eine auffällige Beobachtung dieser Art zu machen. Bei der Feststellung der Biegungsfestigkeit von Glasstreifen (1899 im Festigkeitslaboratorium der T. H. München) fand ich mehrfach, daß der Bruch ganz unvermittelt auftrat, nachdem die Last eine Zeit von der Größenordnung 1 Minute ruhend eingewirkt hatte.

Es lag nahe, zur Aufklärung solcher Erscheinungen ein Gedankenmodell heranzuziehen, das demjenigen nachgebildet ist, mit dem ich früher die Vorgänge der elastischen Nachwirkung und der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Fließspannung verfolgt habe[2]). Es zeigte sich in der Tat, daß sich durch verhältnismäßig geringe Änderungen gegenüber den damaligen Überlegungen ein Modell angeben läßt, das charakteristische Eigenschaften des spröden Bruches zeigt und das auch die zeitlichen Vorgänge in bestimmter Weise zu verfolgen gestattet. Wenn man dabei von vornherein ein rissefreies Medium voraussetzt, so wird man auch hier wieder zu der theoretischen Festigkeit geführt, die weit oberhalb der gewöhnlich beobachteten liegt. Zur Anpassung an die wirklich beobachteten Vorgänge muß man daher auch wieder annehmen, daß von Anfang an Risse vorhanden sind.

2. Das Element. Wie in der früheren Betrachtung soll auch hier das Modell aus einer großen Zahl von gleichartigen Elementen aufgebaut werden, und es mag daher zunächst das

[1]) Proc. of the First Intern. Congr. of Appl. Mechanics, Delft 1924 (erschienen 1925), S. 55. Vgl. auch A. A. Griffith: The phenomena of rupture and flow in solids. Phil. Trans. Roy. Soc. London, A. 221, 1920, S. 163. — A. Smekal: Technische Festigkeit und molekulare Festigkeit. Die Naturwissenschaften, 10. Jahrg., 1922, S. 799. — K. Wolf: Zur Bruchtheorie von A. Griffith. Diese Zeitschr. Bd. 3, 1923, S. 107.

[2]) L. Prandtl: Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper, Diese Zeitschr. Bd. 8, 1928, S. 85.

Element besprochen werden. Wie dort soll von der Relativbewegung eines Körpers A gegen einen Körper B ausgegangen werden, und es sollen dabei die Gleichgewichtslagen eines Massenteilchens betrachtet werden, das elastisch an den Körper A gebunden ist, und das in einem mit dem Körper B verbundenen Kraftfeld steht. Während bei dem Gedankenmodell für den plastischen Körper eine gleitende Bewegung der Körper A und B, dort „Lineale" genannt, zugrunde gelegt wurde, muß es hier natürlich eine Entfernungsänderung sein, und statt des periodischen Kraftfeldes bei der früheren Betrachtung wird man hier ein Kraftfeld mit einer einzigen stabilen Gleichgewichtslage und einem Abfallen der Anziehungskraft gegen Null bei größeren Entfernungen annehmen, vgl. die Kurve P_B in Abb. 1. Die Verschiebungen mögen von derjenigen gegenseitigen Stellung der beiden Körper ausgerechnet werden, bei der der Massenpunkt sich in der Gleichgewichtslage 0 des Kraftfeldes befindet. Die elastische Kraft ist hier dann auch gleich Null. Die neue Gleichgewichtslage des Massenpunktes nach einer Verschiebung ξ ergibt sich aus der Bedingung, daß die elastische Kraft $P_A = -P_B$ sein soll. Wir ziehen deshalb unter der der elastischen Bindung entsprechenden Neigung durch den Endpunkt C von ξ eine Gerade, die die Kraft $-P_A$ darstellt und erhalten als Gleichgewichtslage den Punkt D senkrecht unter dem Schnittpunkt E von P_B und $-P_A$. In dem gezeichneten Beispiel sind noch zwei weitere Schnittpunkte E' und E'' vorhanden, denen zwei weitere Gleichgewichtslagen D' und D'' entsprechen, von denen die erstere labil und die letztere stabil ist. Wenn wir, wie in der früheren Arbeit, die Figur so umzeichnen, daß die Kräfte senkrecht über den Wegen ξ aufgetragen werden, so ergibt sich Abb. 2. Der Verlauf der Kraft P_B bei dauerndem Anwachsen von ξ ist nun so, wie es die strichpunktierte Linie in Abb. 2 darstellt. Wir wollen, da es sich zunächst nur um eine möglichst einfache Formulierung der Theorie handeln soll, diesen Linienzug noch weiter leicht abändern und einen Verlauf nach Abb. 3 annehmen. Es ergibt sich danach als Resultat eine elastische Bindung der beiden Körper A und B aneinander, die aber nur bis zur Erreichung einer maximalen Verschiebung $\xi = 2a$ fortbesteht und bei Überschreitung dieses Wertes verschwindet.

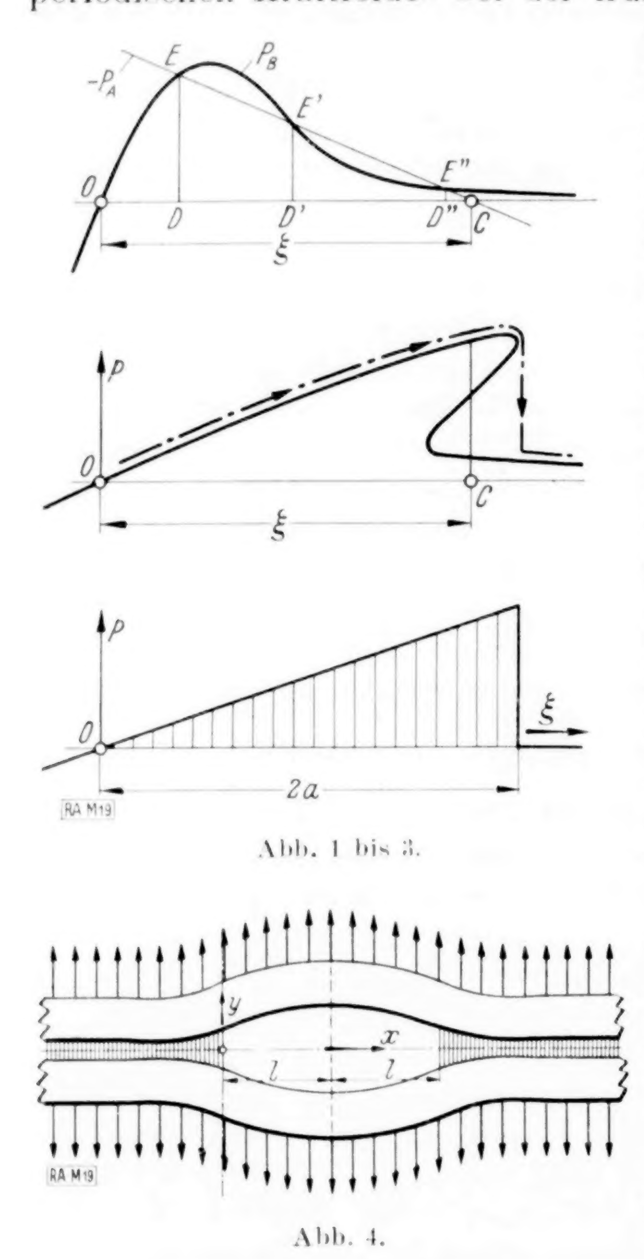


Abb. 1 bis 3.

Abb. 4.

3. Das ganze Modell. Das Gesamtmodell mag nun in der Weise aufgebaut werden, daß die beiden Körper A und B aus auf Biegung beanspruchten Balken bestehen, die durch eine sehr dichte Verteilung von Elementen der beschriebenen Art miteinander verbunden sind, und die nun eine gleichförmige Belastung von Kräften erfahren, die die beiden Balken auseinanderzuziehen versuchen, vgl. Abb. 4. Wir wollen annehmen, daß bereits ein Stück von der Länge $2l$ gerissen ist. Die Balken sind dann auf diese Länge nur den von außen angreifenden Kräften ausgesetzt; da, wo sie noch zusammenhalten, kommt aber eine Kraft proportional der Durchbiegung y hinzu (es ist, wie leicht zu sehen, $2y$ identisch mit der früheren Verschiebung ξ, also ein Weiterreißen zu erwarten, wenn y den Wert a erreicht).

Man würde, genau genommen, besser tun, die Körper A und B nicht als Balken vorauszusetzen, sondern als elastische Scheiben, die durch ein aus unseren Elementen bestehendes Zwischenmedium verbunden sind. Die Durchführung der Aufgabe wäre dadurch aber sehr wesentlich erschwert, es mag deshalb hier zunächst die einfachere Formulierung genügen.

Die Intensität der gleichförmig verteilten Belastung des Balkens, die die Zugspannung in dem spröden Medium darstellt, mag mit σ bezeichnet werden. Wo der Zusammenhang der beiden Balken noch nicht unterbrochen ist, kommt noch nach unten wirkend eine Belastung $= k \cdot y$ hinzu. Es gilt also in diesem Balkenteil die Gleichung

$$E\,J\,y'''' = \sigma - k\,y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

die in bekannter Weise gelöst wird durch $y = \frac{\sigma}{k} + \sum_{1}^{4} C_\nu e^{\lambda_\nu x}$, wobei λ_ν die 4 Werte annimmt $\lambda_\nu = \pm\alpha \pm i\alpha$, mit $\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4\,E\,J}}$. Wenn wir den linken Balkenteil ins Auge fassen, so

müssen die Exponentialfunktionen hier für $x = -\infty$ verschwinden. Es scheiden also von den vier Lösungen sofort zwei aus und es bleibt

$$y = \frac{\sigma}{k} + e^{a x}(C_1 \cos a x + C_2 \sin a x) \quad \text{. . . . . (2).}$$

Wir wollen festsetzen, daß bei $x = 0$ der Riß beginnt. Von hier ab hat man eine andere Lösung, entsprechend $EJy'''' = \sigma$. Da wegen (2)

$$y(0) = \frac{\sigma}{k} + C_1; \qquad y'(0) = a(C_1 + C_2); \qquad y''(0) = 2a^2 C_2; \qquad y'''(0) = 2a^3(C_2 - C_1)$$

ist und die beiden elastischen Linien in Ordinate, Neigung, Moment und Querkraft stetig ineinander übergehen müssen, wird die Lösung für $x > 0$

$$y = \frac{\sigma}{k} + C_1 + a(C_1 + C_2)\,x + a^2 C_2 x^2 + a^3(C_2 - C_1)\frac{x^3}{3} + \frac{\sigma x^4}{24 EJ} \quad \text{. . . (3).}$$

Für $x = l$ soll die Tangente waagerecht sein und die Querkraft verschwinden. Es ist also

$$y'(l) = 0; \qquad y'''(l) = 0.$$

Dies gibt zwei Gleichungen zur Bestimmung von C_1 und C_2, und zwar wird

$$C_1 = \frac{\sigma l}{4a^3 EJ} \cdot \frac{1 + 2al + \frac{2}{3}a^2 l^2}{1 + al} \quad \text{. . (4) und} \quad C_2 = \frac{\sigma l}{4a^3 EJ} \cdot \frac{\frac{2}{3}a^2 l^2 - 1}{1 + al} \quad \text{. . . . . . (5).}$$

Nach unseren früheren Festsetzungen müssen wir nun, wenn der Riß weiterreißen soll, $y(0) = a$ setzen, was uns die für das Weiterreißen nötige Belastung σ liefert. Diese ergibt sich somit, wenn wir noch die örtliche Zerreißspannung $\sigma_0 = ka$ einführen, zu

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{1 + al}{1 + 2al + 2a^2 l^2 + \frac{2}{3}a^3 l^3} \quad \text{. . . . . (6).}$$

Die vorstehende Betrachtung hat mit der von Griffith das gemein, daß die zum Weiterreißen nötige Spannung immer mehr abnimmt, je länger der Riß wird. Das Gleichgewicht des Körpers wird also so lange aufrecht bleiben, bis die allgemeine Zugbeanspruchung σ den Wert erreicht, wo das Weiterreißen beginnt, und von da aus ist kein Gleichgewicht mehr vorhanden, der Riß geht durch den ganzen Körper weiter. Die Abhängigkeit der Spannung σ von der Rißlänge l ergibt sich bei unserer Betrachtung allerdings anders als bei Griffith. Während dort die Spannung umgekehrt proportional $\sqrt{l}$ ist, was durch die Griffithschen Versuche an künstlich erzeugten Rissen bestätigt wird, fällt sie in unserem Modell, wenn erst große Werte von al erreicht sind, genähert umgekehrt proportional l^2. Soweit man mit qualitativer Übereinstimmung zufrieden ist, ist dieser Unterschied nicht sehr wesentlich. Man kann ihn — in Abweichung von dem konkreten Modell — dadurch verbessern, daß man eine passend mit der Rißlänge wachsende Balkenhöhe annimmt, was den wirklichen Verhältnissen besser gerecht wird[3]).

4. Zeitwirkung. Es sollen jetzt in Analogie zu meinen Betrachtungen von 1928 auch die Zeitwirkungen studiert werden. Dabei wird wieder von der Vorstellung ausgegangen, daß infolge der Wärmebewegung auch für Teilchen, die sich noch in einer stabilen Gleichgewichtslage befinden, die Erreichung der labilen Lage und damit der Übergang in die andere stabile Lage durch zufällige, besonders große Wärmeschwingungen möglich ist, die Teilchen also diesen Übergang schon vorzeitig vollziehen, während sie sich der Grenzlage nähern. Wir wollen hier die in meiner früheren Abhandlung durchgeführten statistischen Betrachtungen nicht im einzelnen wiederholen, sondern begnügen uns mit der Anführung des dortigen Ergebnisses. Wenn wir die Aufgabe so stellen, daß zur Zeit $t = 0$ eine bestimmte Belastung $\sigma = \sigma_1$ wirksam wird und weiter in konstanter Stärke aufrechterhalten wird, so wird sich am Rande des Risses, während dieser fortschreitet, eine Spannung einstellen, die von der Geschwindigkeit der Laststeigerung dort abhängt. Dies hängt damit zusammen, daß jeweils die Zahl der Elemente, die vorzeitig die obere Gleichgewichtslage verlassen haben, um so größer

[3]) Man erhält die Griffithsche Beziehung für große al, wenn man die Balkenhöhe h proportional mit der Rißlänge l annimmt, dabei die Federkonstante k als konstant ansieht. Da das Trägheitsmoment J proportional h^3 ist, ergibt sich mit diesem Ansatz a proportional $l^{-3/4}$, also $a^2 l^2$ prop. $\sqrt{l}$. Der Oberflächenenergie T entspricht dabei die Arbeit $\frac{\sigma_0 \cdot a}{2}$ (= Inhalt des Dreiecks von Abb. 3).

ist, je mehr Zeit ihnen, während sie sich der kritischen Lage näherten, verblieben ist. Durch sinngemäße Übertragung der Gl. (17) meiner früheren Arbeit erhalten wir für die örtliche Höchstspannung σ_0 am Rande des Risses, die hier also zeitlich veränderlich ist, die Näherungsformel

$$\sigma_0 = A + B \ln c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

wobei $c = \frac{d\xi}{dt}$ die erwähnte Streckgeschwindigkeit ist. Bei unserem Modell ist c proportional $\frac{dy}{dx}(0) \cdot \frac{dl}{dt}$ zu setzen; $\frac{dl}{dt}$ ist hierbei die Geschwindigkeit, mit der sich der Riß verlängert. Nach Formel (7) wird man bei jedem Wert σ_0 ein dauerndes Weiterschreiten des Risses erhalten. Bei den normalen spröden Stoffen ist jedoch der Wert B ziemlich klein gegen A, so daß bei Werten von σ_0, die erheblich unter der Zerreißfestigkeit liegen, die Geschwindigkeiten c ganz unmerklich klein werden.

Durch den Mechanismus unseres Modells steht σ_0 mit dem aus der äußeren Belastung gegebenen σ_1 und der Rißlänge l durch eine Gleichung von der Form $\sigma_0 = \sigma_1 f(a l)$ in Verbindung; es mag dabei offen bleiben, ob wir nach Gl. (6)

$$f(a l) = \frac{1 + 2 a l + 2 a^2 l^2 + \frac{2}{3} a^3 l^3}{1 + a l}$$

setzen, oder ob wir nach Griffith $f(a l)$ prop. $\sqrt{a l}$ annehmen. Eine zweite Beziehung für σ_0 ergibt sich durch Anwendung von Gl. (7):

$$\sigma_0 = A + B \ln\left(\frac{dl}{dt} \cdot \frac{dy}{dx}(0)\right).$$

Dabei ist noch

$$\frac{dy}{dx}(0) = a(C_1 + C_2) = \frac{2\sigma_1 a^3 l^2}{k} \cdot \frac{1 + \frac{2}{3} a l}{1 + a l} \quad \text{oder allgemeiner} \quad \frac{dy}{dx}(0) = \frac{a \sigma_1}{k} \varphi(a l).$$

Durch Fortschaffen von σ_0 ergibt sich, wenn gleich noch delogarithmiert wird,

$$e^{\frac{\sigma_1 f(a l)}{B}} = e^{\frac{A}{B}} \cdot \frac{a \sigma_1}{k} \varphi(a l) \cdot \frac{dl}{dt}.$$

Dies läßt sich sofort integrieren und gibt t als Funktion der augenblicklichen Rißlänge l:

$$t = \int_{l_0}^{l} \frac{a \sigma_1}{k} \varphi(a l)\, e^{\frac{A - \sigma_1 f(a l)}{B}}\, dl \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Man überzeugt sich leicht, daß das Integral der rechten Seite wegen des monoton wachsenden $f(a l)$ im Exponenten immer endlich ist. Der Vorgang endet also immer innerhalb endlicher Zeit t_1 mit der vollen Durchtrennung ($l = \infty$)! Die Zeiten bis dahin können aber unter Umständen ungeheuer groß sein. Man kann den physikalischen Inhalt von Gl. (8) noch besser übersehen, wenn man für das Integral in der Weise eine Näherung rechnet, daß man die Funktion unterm Exponenten durch die zwei ersten Glieder der Taylorschen Reihe ersetzt und die übrigen Funktionen beim Integrieren als Konstante behandelt. Auf diese Weise ergibt sich

$$t_1 \approx \frac{a B}{k} \cdot \frac{\varphi(a l_0)}{f'(a l_0)} \cdot e^{\frac{A - \sigma_1 f(a l_0)}{B}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Der entscheidende Faktor in dieser Formel ist offenbar $e^{\frac{A - \sigma_0}{B}}$ (es war $\sigma_0 = \sigma_1 \cdot f(a l)$ die Spannung am Rande des Risses). Da bei einigermaßen festen Körpern B sehr klein gegen A zu sein pflegt, nimmt $e^{\frac{A - \sigma_0}{B}}$ ungeheuer große Werte an, solange σ_0 beträchtlich kleiner als A bleibt. Es ergeben sich dann Zeiten t_1, die weit oberhalb der bei einem Versuch oder auch bei der alltäglichen Erfahrung in Frage kommenden Wartezeiten liegen, so daß der experimentelle Befund also auf Nichteintreten des Bruches lautet.

Man kann zu einer dem Versuch angemessenen Fragestellung kommen, wenn man sich vornimmt, die Belastung jeweils nach Ablauf einer festgesetzten Wartezeit T in einer geometrischen Reihe auf das $(1 + \varepsilon)$-fache zu steigern. Dadurch ergibt sich gemäß unseren Formeln

eine von ε abhängige Erwartungswahrscheinlichkeit für die Zeit t_1 zwischen dem Auflegen der letzten Last und dem Bruch. Nach einer vorläufigen Schätzung würde der Mittelwert von $\log \frac{T}{t_1}$ genähert proportional $\frac{\varepsilon \sigma_0}{B}$ sein.

5. Ausblick. In dem Bisherigen ist ein sehr regelmäßiger molekularer Aufbau, wie er z. B. bei einem Kristall vorliegt, angenommen, d. h. es sind beim Aufbau des Modelles lauter gleichartige Elemente verwendet. Man kann natürlich auch an den Fall denken, daß die Kraftfelder bzw. die Federlängen und Federkonstanten der einzelnen Elemente durchaus verschieden sind, was einem sehr unhomogenen Aufbau des spröden Stoffes entspricht. Auf diese Weise werden die in Erscheinung tretenden Kräfte durch Summierung über die verschiedenartigen Elemente erhalten. Wie leicht zu sehen, bekommt man durch eine statistische Superposition von Kraftverteilungen entsprechend Abb. 3 wieder eine Kurve, die etwa der Kurve P_B in Abb. 1 entspricht, aber mit dem Unterschied, daß jetzt auch eine mäßige Zugbelastung schon mit dem Zerreißen einiger Elemente verknüpft ist, so daß sich ein nichtproportionales Verhalten und auch eine der Hysteresis ähnliche fortschreitende Schwächung bei wiederholter Belastung ergibt. Es ist zu vermuten, daß bei sehr unregelmäßig aufgebauten spröden Körpern (Steinen, Beton, schwach gebrannter Ton usw.) derartige Erscheinungen wirklich beobachtet werden können. Bei Stoffen dieser Art wird man noch an eine andere Abänderung des Modelles denken können. Wenn man eine Aufeinanderschichtung von Balken annimmt, die von vornherein mit schwachen mehr oder minder unregelmäßig verteilten Krümmungen versehen sind, so daß sich nur kürzere Haftstellen ergeben, die mit unseren Elementen zu besetzen sein würden, so würde hierdurch die Eigenschaft von steinartigen festen Stoffen, daß der Elastizitätsmodul bei Druckbeanspruchung zunimmt und bei Zugbeanspruchung abnimmt, im Modell verwirklicht werden und es ließen sich wahrscheinlich die bei solchen Stoffen beobachteten Hysteresis- und Fließerscheinungen mit einem Modell der geschilderten Art ebenfalls weitgehend verfolgen. M 19

Formänderung und Spannungen einer dünnwandigen, an den Rändern frei aufliegenden, beliebig belasteten Zylinderschale.

Eine Erweiterung der Navierschen Integrationsmethode.

Von *H. Reissner* in Berlin-Charlottenburg.

In einer Arbeit über die Knickfestigkeit von Zylinderschalen hat v. Mises[1]) die merkwürdige Symmetrie der vielfältigen Gleichungen in einem sehr eleganten Ansatz ausgenutzt. Dieser Ansatz, der in jedem Gliede der Navierschen trigonometrischen Doppelreihe sowohl die Randbedingungen der biegungsfreien Stützung bzw. des geschlossenen Umfangs als auch das homogene Differentialgleichungssystem befriedigt, läßt sich nun in einer Erweiterung der Navierschen Integrationsmethode auch für eine besonders einfache Integration des inhomogenen, d. h. mit Belastungsfunktionen behafteten Gleichungssystems mit Hilfe der Fourieranalyse verwerten.

Die Randbedingungen dürfen hierbei übrigens noch allgemeiner als bei v. Mises gewählt werden, indem nach dem Vorgang von Lewe[2]) bei der Pilzdecke auch Einspannung mit verschwindender Querkraft durch einen analogen Ansatz beherrscht wird.

Der Rechnungsgang eignet sich für irgendwie belastete, genügend dünnwandige Zylinderschalen, wie sie bei rohrförmigen Gefäßen, Stollenleitungen, Gewölben[3]), Wicklungskappen von Dynamomaschinen usw. auftreten. Die Methode soll hier jedoch nur für eine geschlossene, an zwei Kreisrändern frei gestützte und achsial unsymmetrisch radial belastete Zylinderschale durchgeführt werden, und zwar sei die Radialbelastung in Richtung der Zylindererzeugenden konstant und in Umfangsrichtung über 2 Winkelbereiche von je 120° verteilt.

Die Ergebnisse werden zum Schluß auf ein praktisches Zahlenbeispiel angewendet und zeigen, daß mit einer Gliederzahl von sechs eine Genauigkeit von 0,5 % für die Verschiebungen und Längsspannungen und von 4 % für die Biegungsspannungen erreicht wird, daß ferner

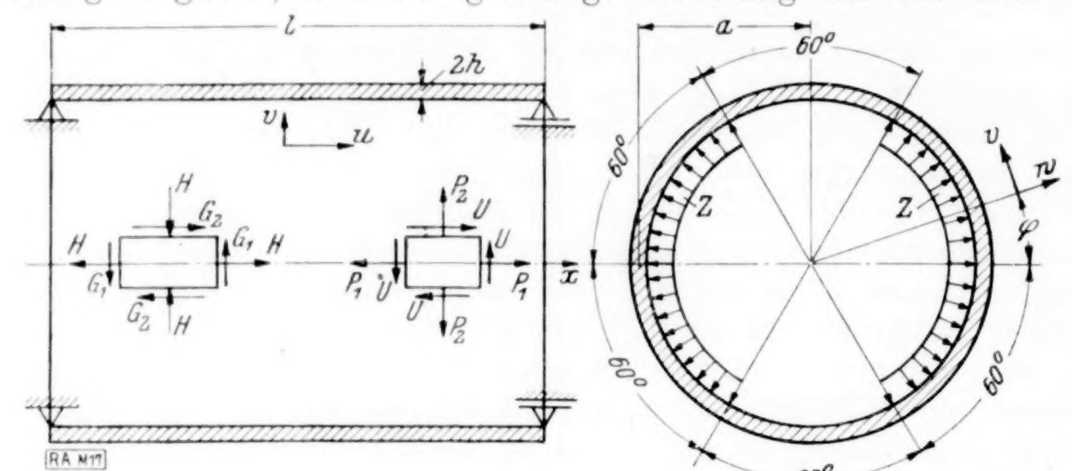
[1]) R. v. Mises: Der kritische Außendruck zylindrischer Rohre, Z. d. V. D. Ing. 1914, S. 750.

[2]) V. Lewe: Die strenge Lösung des Pilzdeckenproblems, Berlin 1922, 2. Aufl. 1926, Ernst u. Sohn.

[3]) Bei Gewölben führt, wie nicht verschwiegen werden darf, der hier gebrachte und auch der unten erwähnte Schwerinsche Ansatz nur zum Ziele, wenn entweder die Zylindererzeugenden oder die Randkreise gelenkig zur Tangentialebene parallel geführt oder eingespannt zur Tangentialebene senkrecht geführt werden, was beides nicht der praktischen Ausführung entspricht.

die achsiale Biegungsfestigkeit die Ringzugsspannungen und das Ovalwerden der Querschnitte stark vermindert.

Der Vollständigkeit wegen ist noch zu bemerken, daß die gegebene Lösung nicht die einzig mögliche, aber bei gelenkiger Stützung die bei weitem einfachste ist. Eine andere Form der Lösung für die ähnliche Aufgabe des wassergefüllten, waagerechten Rohres, bei welcher die Randbedingungen nicht im ersten Ansatz, sondern erst durch die Integrationskonstanten befriedigt werden, was andererseits aber auch die Möglichkeiten etwas allgemeinerer Stützungen bietet, hat E. Schwerin[4]) angegeben.



Die allgemeine Lösung. Mit den Bezeichnungen der Abbildung lauten nun nach Love, Elastizität 1893, S. 255, die Gleichgewichtsbedingungen der Spannungsresultanten P_1, P_2, U kg cm^{-1}, G_1, G_2, H kg

$$\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -X_{(x,\varphi)} = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial P_2}{\partial \varphi} - \frac{1}{a}\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial G_2}{\partial \varphi}\right) = -Y_{(x,\varphi)} = 0 \quad \ldots\ldots \quad (1),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial G_1}{\partial x} - \frac{1}{a}\frac{\partial H}{\partial \varphi}\right) - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial G_2}{\partial \varphi}\right) - \frac{P_2}{a} = -Z_{(x,\varphi)}$$

wo, wie eingangs bemerkt, nur aus Gründen der bequemeren Darstellung die tangentialen Belastungen X und Y Null gesetzt wurden.

Die Spannungsresultanten sind hierbei für genügend dünnwandige Schalen ausgedrückt in den Formänderungskomponenten wie folgt:

$$P_1 = \frac{3C}{h^2}(\varepsilon_1 + \sigma\varepsilon_2) \quad P_2 = \frac{3C}{h^2}(\varepsilon_2 + \sigma\varepsilon_1) \quad U = \frac{3C(1-\sigma)}{2h^2}\omega$$

$$G_1 = -C(\varkappa_1 + \sigma\varkappa_2) \quad G_2 = +C(\varkappa_2 + \sigma\varkappa_1) \quad H = C(1-\sigma)\tau \quad \ldots\ldots \quad (2),$$

wo C die sogenannte Plattensteifigkeit $C = \frac{E(2h)^3}{12(1-\sigma^2)}$ und σ die Poissonsche Zahl bedeuten.

Die Formänderungskomponenten drücken sich ihrerseits durch die Verschiebungen u, v, w wie folgt aus:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{a}\frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{a} \quad \omega = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\varkappa_1 = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varkappa_2 = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{\partial \varphi}\right) \quad \tau = \frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial \varphi} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

In bekannter Weise sind hier ε die Dehnungen, ω die Gleitungen, $\varkappa$ die Krümmungen und τ die Verwindungen.

Die Grenzbedingungen und die Symmetrie der Belastung werden nun befriedigt durch den folgenden Ansatz:

$$u = \sum \alpha_{mn}\, h \cos(2n\varphi)\cos\left(m\pi\frac{x}{l}\right)$$

$$v = \sum \beta_{mn}\, h \sin(2n\varphi)\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right) \quad \ldots\ldots \quad (4),$$

$$w = \sum \gamma_{mn}\, h \cos(2n\varphi)\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right)$$

wo α_{mn}, β_{mn}, γ_{mn} Konstanten sein sollen.

Man setze nun diesen Ansatz in die obigen Gleichungen ein und führe die folgenden reinen Zahlgrößen ein:

$$\lambda = \frac{l}{a}, \quad \eta = \frac{h}{l}.$$

[4]) E. Schwerin: Über die Spannungen in freitragenden, gefüllten Rohren. Diese Ztschr. 2, 1922, S. 340.

Dann entstehen die folgenden drei Bestimmungsgleichungen für die Koeffizienten $\alpha_{m\,n}$, $\beta_{m\,n}$, $\gamma_{m\,n}$ (wobei in der zweiten Gleichung im zweiten Glied $2\left(\frac{h}{a}\right)^2$ gegen 3 und $8\left(\frac{h}{a}\right)^2$ gegen 24 vernachlässigt ist):

$$\alpha_{m\,n}\left[\pi^2 m^2 + 2(1-\sigma)\lambda^2 n^2\right] - \beta_{m\,n}\pi(1+\sigma)\lambda\, m\, n - \gamma_{m\,n}\pi\sigma\lambda\, m = 0,$$

$$\alpha_{m\,n} 6\pi(1+\sigma)\lambda\, m\, n - \beta_{m\,n}\left[3\pi^2(1-\sigma)m^2 + 24\lambda^2 n^2\right] - \gamma_{m\,n} 4\, n\lambda^2\left[3 + \eta^2(m^2\pi^2 + 4n^2\lambda^2)\right] = 0,$$

$$\sum\sum \cos(2n\varphi)\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right)\cdot\Big\{\alpha_{m\,n}\pi\sigma\lambda\, m - \beta_{m\,n}\cdot 2\lambda^2 n\left[1 + \frac{\eta^2}{3}(4\lambda^2 n^2 + \pi^2(2-\sigma)m^2)\right]$$
$$-\gamma_{m\,n}\lambda^2\left[1 + \frac{\eta^2}{3\lambda^2}(4\lambda^2 n^2 + \pi^2 m^2)^2\right]\Big\} = -Z\frac{h\, l^2}{3C}.$$

Die geschweiften Klammerausdrücke der letzten Gleichung sind nun offenbar als Fouriersche Koeffizienten zu bestimmen und zwar für den konkreten betrachteten Fall, daß die Radialbelastung konstant längs der Erzeugenden ist und sich über zwei Winkelbereiche von 120° erstreckt.

Hierbei verschwinden die mit gradzahligen m behafteten Glieder und die dritte Gleichung wird:

$$\alpha_{m\,n}\pi\sigma\lambda\, m - \beta_{m\,n}\cdot 2\lambda^2 n\left[1 + \frac{\eta^2}{3}(4n^2\lambda^2 + \pi^2(2-\sigma)m^2)\right]$$
$$-\gamma_{m\,n}\lambda^2\left[1 + \frac{\eta^2}{3\lambda^2}(4\lambda^2 n^2 + \pi^2 m^2)^2\right] = -Z\frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{m\, n}\cdot\frac{4(1-\sigma^2)}{\pi^2 E\eta^2}$$

und für $n = 0$:

$$\alpha_{m\,0}\pi\sigma\lambda\, m - \gamma_{m\,0}\lambda^2\left[1 + \frac{\eta^2}{3\lambda^2}\pi^4 m^4\right] = -Z\frac{4(1-\sigma^2)}{\pi^2 E\eta^2}\cdot\frac{1}{m}\cdot\frac{\pi}{3},$$

wo für C sein Wert $\frac{E\,8\,h^3}{12(1-\sigma^2)}$ eingesetzt ist.

Führt man noch zur Abkürzung die reine Zahl $Z\frac{4(1-\sigma^2)}{\pi^2 E\eta^2} = \Phi$ ein, so lauten also die drei Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\alpha_{m\,n}\left[\pi^2 m^2 + 2(1-\sigma)\lambda^2 n^2\right] - \beta_{m\,n}\pi(1+\sigma)\lambda\, m\, n - \gamma_{m\,n}\pi\sigma\lambda\, m = 0\\
&\alpha_{m\,n}\cdot 6\pi(1+\sigma)\lambda\, m\, n - \beta_{m\,n}\left[3\pi^2(1-\sigma)m^2 + 24\lambda^2 n^2\right] - \gamma_{m\,n}\cdot 4\, n\lambda^2\left[3 + \eta^2(m^2\pi^2 + 4n^2\lambda^2)\right] = 0\\
&\alpha_{m\,n}\pi\sigma\lambda\, m - \beta_{m\,n}\cdot 2\lambda^2 n\left[1 + \frac{\eta^2}{3}(4n^2\lambda^2 + \pi^2(2-\sigma)m^2)\right] - \gamma_{m\,n}\lambda^2\left[1 + \frac{\eta^2}{3\lambda^2}(4\lambda^2 n^2 + \pi^2 m^2)^2\right]\\
&\qquad = -\Phi\cdot\frac{\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)}{m\, n}
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

und für den Index $n = 0$

$$\alpha_{m\,0}\pi\, m - \gamma_{m\,0}\sigma\lambda = 0 \qquad -\beta_{m\,0}3\pi^2(1-\sigma)m^2 = 0$$

$$\alpha_{m\,0}\pi\sigma\lambda\, m - \gamma_{m\,0}\lambda^2\left[1 + \frac{\eta^2}{3\lambda^2}\pi^4 m^4\right] = -\Phi\cdot\frac{\pi}{3m}$$

oder:

$$\gamma_{m\,0} = \frac{+\Phi\pi}{3m\left[\lambda^2(1-\sigma^2) + \frac{\eta^2}{3}\pi^4 m^4\right]} \qquad \beta_{m\,0} = 0 \qquad \alpha_{m\,0} = \frac{+\Phi\sigma\lambda}{3m^2\left[\lambda^2(1-\sigma^2) + \frac{\eta^2}{3}\pi^4 m^4\right]}.$$

Sind die Koeffizienten $\alpha_{m\,n}$, $\beta_{m\,n}$, $\gamma_{m\,n}$ bestimmt, so sind damit insbesondere:

$w_{\max}$ bzw. $w_{\min}$ bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\qquad G_{2\max}$ bzw. $G_{2\min}$ bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$P_{2\max}$ bzw. $P_{2\min}$ bei $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$

zu ermitteln. Es ist nach den Gl. (2)

$$\left.\begin{aligned}
P_2 &= \frac{3C}{l\,h}\sum_{m,n}\cos(2n\varphi)\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right)\cdot\left[-\alpha_{m\,n}\sigma\pi\, m + \beta_{m\,n}\cdot 2n\lambda + \gamma_{m\,n}\cdot\lambda\right]\\
G_2 &= -\frac{C\cdot h}{l^2}\sum_{m,n}\cos(2n\varphi)\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right)\left[\gamma_{m\,n}(\pi^2\sigma\, m^2 + 4n^2\lambda^2) + \beta_{m\,n}\cdot 2n\lambda^2\right]
\end{aligned}\right\} \quad (7).$$

Für die Spannungsresultanten P, G usw. ist also die Konvergenz nicht so gut wie für die Verschiebungen u, v, w.

Die Zahlenrechnung. Es sollen der Zahlenrechnung die folgenden Daten zugrunde gelegt werden (siehe auch Abb. 1): $a = 48$ cm, $l = 27{,}6$ cm, $h = 3{,}4$ cm, $\sigma = 0{,}3$ (Poissonsche Zahl), $E = 2{,}2 \cdot 10^6$ kgcm^{-2}, $Z = 160$ kgcm^{-2} (Zentrifugalbelastung).

$n = 0$.

Wir bestimmen zunächst die Koeffizienten α, β, γ für $n = 0$ und die Werte 1, 3, 5 von m, wobei die folgenden Zahlwerte immer wiederkehren:

$$\Phi = Z \frac{4(1 - 0{,}09)}{\pi^2 \, 2{,}2 \cdot 10^6 \cdot 0{,}0152} = Z \cdot 1{,}11 \cdot 10^{-5},$$

$$\lambda = \frac{l}{a} = \frac{27{,}6}{48} = 0{,}575, \qquad \lambda^2 = 0{,}331, \qquad \eta = \frac{h}{l} = \frac{3{,}4}{27{,}6} = 0{,}1231, \qquad \eta^2 = 0{,}0152.$$

Daraus ergeben sich die folgenden Koeffizientenwerte:

m	$\frac{\eta^2 \pi^4}{3} m^4 + \lambda^2 (1 - \sigma^2)$	$\gamma_{m0} \Phi^{-1}$	$\alpha_{m0} \Phi^{-1} m$
1	0,798	1,316	0,0722
3	40,55	0,00861	0,000474
5	311,30	0,000673	0,0000370

$n = 1, 2, 3, 4, 5, \qquad m = 1, 3, 5$.

Wir eliminieren zunächst γ_{mn} mit Hilfe der ersten der Gl. (5), wobei wir zur Abkürzung setzen:

$$\alpha_{mn} \cdot m = \alpha' \qquad \beta_{mn} \cdot n = \beta',$$

wo also für γ_{mn} die später noch zu brauchende Gleichung gilt:

$$\gamma_{mn} = \alpha' \left[\frac{\pi}{\sigma \lambda} + \frac{2(1-\sigma)}{\pi \sigma} \lambda \left(\frac{n}{m}\right)^2\right] - \beta' \frac{1+\sigma}{\sigma} = \alpha' \left[18{,}19 + 0{,}855 \left(\frac{n}{m}\right)^2\right] - \beta' \cdot 4{,}33.$$

Man kann aus (5) sofort sehen, daß für $n = 3$ sich ergibt $\sin \frac{2\pi n}{3} = 0$ und damit also auch die Koeffizienten α_{m3}, $\beta_{m,3}$ und $\gamma_{m3} = 0$ werden.

Für die übrigen Koeffizienten führen wir zum Zwecke der tabellarischen Übersichtlichkeit für die Gl. (5) die Abkürzungen ein:

$$p_{mn} = n^2 [m^2 (869 + 51{,}1 \, m^2 + 9{,}77 \, n^2) + n^2 (50{,}6 + 0{,}399 \, n^2)]$$

$$q_{mn} = m^2 [m^2 (12{,}85 \, n^2 - 102{,}5) + n^2 (138{,}2 + 1{,}72 \, n^2)]$$

$$r_{mn} = 16{,}55 \, m^2 + 0{,}854 \, n^2 + 0{,}0282 \, (9{,}9 \, m^2 + 0{,}464 \, n^2)(9{,}9 \, m^2 + 1{,}324 \, n^2)^2$$

$$s_{mn} = m^2 [2{,}33 + 10^{-2} (6{,}63 \{9{,}9 \, m^2 + 1{,}324 \, n^2\}^2 - 1{,}34 \, n^2 - 17{,}08 \, m^2)].$$

Dann ergeben sich für α' und β' die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} -\alpha'_{mn} p_{mn} + \beta'_{mn} q_{mn} &= 0 \\ \alpha'_{mn} r_{mn} - \beta'_{mn} s_{mn} &= \frac{m}{n} \sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right) \cdot \Phi \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots (9).$$

Die rechnerische Auflösung läßt sich wie folgt zusammenstellen:

$m = 1$

n	p	q	r	s	$\frac{1}{n} \sin \frac{2\pi n}{3}$	$10^3 \Phi^{-1} \alpha'$	$10^3 \Phi^{-1} \beta'$	$10^3 \Phi^{-1} \gamma$
1	98,3	5,02	54,2	10,52	+ 0,866	− 5,70	− 111,5	+ 374,5
2	117,0	13,23	96,5	17,45	− 0,433	+ 7,50	+ 66,2	− 125,5
4	197,5	17,21	502,7	64,04	+ 0,2165	− 0,938	− 10,76	+ 16,7
5	264,5	18,99	1158	124,5	− 0,1732	+ 0,2992	+ 4,16	− 6,21

$m = 3$

n	p	q	r	s	$\frac{3}{n}\sin\frac{2\pi n}{3}$	$10^4\,\Phi^{-1}\,\alpha'$	$10^4\,\Phi^{-1}\,\gamma$	$10^4\,\Phi^{-1}\,\beta'$
1	137,1	— 66,73	208,0	48,80	2,698	0,874	23,79	— 1,80
2	141,8	3,03	230,5	53,25	— 1,299	0,0574	— 10,56	2,69
4	161,2	22,39	333,6	72,80	0,6495	— 0,3435	3,93	— 2,47
5	176,4	26,01	427,7	89,30	— 0,5196	0,291	— 2,55	1,97

Für $m = 5$ genügt die schon oben gegebene Berechnung der Werte für $n = 0$.

Aus den so erhaltenen Reihenkoeffizienten α, β und γ der Verschiebungen u, v, w der Gl. (4) lassen sich nun auch die Reihenkoeffizienten der Spannungsresultanten, insbesondere der maßgebenden P_2 (Ringspannung) und G_2 (Biegungsmoment) unmittelbar ableiten wie folgt:

Schreiben wir nämlich zur Abkürzung:

$$P_2 = \frac{3\,C\,\Phi}{l\,h}\sum_{m,\,n} P_{m\,n}\cos(2\,n\,\varphi)\sin\left(\frac{m\,\pi\,x}{l}\right),$$

$$G_2 = -\frac{C\,h\,\Phi}{l^2}\sum_{m,\,n} G_{m\,n}\cos(2\,n\,\varphi)\sin\left(\frac{m\,\pi\,x}{l}\right),$$

wo also nach den Gl. (7) die $P_{m\,n}$ und $G_{m\,n}$ die folgende Bedeutung haben:

$$P_{m\,n} = \Phi^{-1}\left[-\alpha'_{m\,n}\,\sigma\,\pi + \beta'_{m\,n}\cdot 2\,\lambda + \gamma_{m\,n}\,\lambda\right],$$

$$G_{m\,n} = \Phi^{-1}\left[\gamma_{m\,n}\,(\pi^2\,\sigma\,m^2 + 4\,n^2\,\lambda^2) + \beta'_{m\,n}\cdot 2\,\lambda^2\right],$$

so ergeben sich noch die folgenden Tabellen:

n	$m = 1$		$m = 3$		$m = 5$	
	$P_{1\,n}\cdot 10^3$	$G_{1\,n}\cdot 10^3$	$P_{3\,n}\cdot 10^4$	$G_{3\,n}\cdot 10^4$	$P_{50}\cdot 10^4$	$G_{50}\cdot 10^4$
0	688,9	3905	45,09	+ 2300	3,53	500
1	92,2	1533	10,79	+ 667,3		
2	— 2,97	— 992	— 3,039	— 336,2		
3	0	0	0	0		
4	— 1,89	+ 397	— 0,261	+ 186,5		
5	+ 0,943	— 221,7	+ 0,5195	— 151,0		

Damit sind alle Reihenkoeffizienten für die radialen Verschiebungen w, die Ringspannungen P_2 und die Ringbiegungsmomente G_2 gegeben. Die Maximalwerte entstehen nun offenbar für $x = \frac{l}{2}$ und für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Wir haben also die folgenden Reihen noch zu summieren:

$\varphi = 0$

$$w = h\sum_{m,\,n}\gamma_{m\,n}\sin\left(\frac{m\,\pi}{2}\right) \approx h\sum_{n}(\gamma_{1\,n} - \gamma_{3\,n} + \gamma_{5\,n})$$

$$\approx h\left[\gamma_{10} + \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{14} + \gamma_{15} - \gamma_{30} - \gamma_{31} - \gamma_{32} - \gamma_{34} - \gamma_{35} + \gamma_{50}\right],$$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$w = h\sum_{m,\,n}\gamma_{m\,n}\sin\left(\frac{m\,\pi}{2}\right)\cos(n\,\pi)$$

$$\approx h\sum_{n}(\gamma_{1\,n}\cos(n\,\pi) - \gamma_{3\,n}\cos(n\,\pi) + \gamma_{5\,n}\cos(n\,\pi))$$

$$\approx h\left[\gamma_{10} - \gamma_{11} + \gamma_{12} + \gamma_{14} - \gamma_{15} - \gamma_{30} + \gamma_{31} - \gamma_{32} - \gamma_{34} + \gamma_{35} + \gamma_{50}\right].$$

Die Summierung nach den früheren Tabellen ergibt mit einer Genauigkeit von $\pm 0{,}5\,\%$

$$x = \frac{l}{2}\begin{cases}\varphi = 0: & \dfrac{w}{\Phi\,h} = 1{,}567, \quad \dfrac{w}{Z} = 5{,}86\cdot 10^{-5};\\[2ex] \varphi = \dfrac{\pi}{2}: & \dfrac{w}{\Phi\,h} = 0{,}834, \quad \dfrac{w}{Z} = 3{,}12\cdot 10^{-5}.\end{cases}$$

Hier ist $\Phi\,h = Z\cdot 1{,}11\cdot 10^{-5}\cdot 3{,}4 = Z\cdot 3{,}74\cdot 10^{-5}$ gesetzt.

In analoger Weise wird:

$$x=\frac{l}{2}\begin{cases}\varphi=0\;:\;P_2=\dfrac{3\,C\,\Phi}{l\,h}\sum\limits_{m,n}P_{mn}\sin\dfrac{m\,\pi}{2}\approx\dfrac{3\,C\,\Phi}{l\,h}\sum\limits_{n}(P_{1n}-P_{3n}+P_{5n})\\[2ex]\qquad\approx\dfrac{3\,C\,\Phi}{l\,h}\,[P_{10}+P_{11}+P_{12}+P_{14}+P_{15}-P_{30}-P_{31}-P_{32}-P_{34}-P_{35}+P_{50}]\\[2ex]\varphi=\dfrac{\pi}{2}:\;P_2\approx\dfrac{3\,C\,\Phi}{l\,h}\,[P_{10}-P_{11}+P_{12}+P_{14}-P_{15}-P_{30}+P_{31}-P_{32}-P_{34}+P_{35}+P_{50}],\end{cases}$$

$$x=\frac{l}{2}\begin{cases}\varphi=0\;:\;G_2\approx-\dfrac{C\,h\,\Phi}{l^2}\,[G_{10}+G_{11}+G_{12}+G_{14}+G_{15}-G_{30}-G_{31}-G_{32}-G_{34}-G_{35}+G_{50}]\\[2ex]\varphi=\dfrac{\pi}{2}:\;G_2\approx-\dfrac{C\,h\,\Phi}{l^2}\,[G_{10}-G_{11}+G_{12}+G_{14}-G_{15}-G_{30}+G_{31}-G_{32}-G_{34}+G_{35}+G_{50}].\end{cases}$$

Die Summierung ergibt wiederum nach den früheren Tabellen:

$$x=\frac{l}{2}\begin{cases}\varphi=0\;:\;\dfrac{P_2\,l\,h}{3\,C\,\Phi}=0{,}772,\quad\dfrac{G_2\,l^2}{C\,h\,\Phi}=4{,}40,\quad\dfrac{P_2}{Z}=\underline{\underline{17{,}18}},\quad\dfrac{G_2}{Z}=-\underline{\underline{13{,}63}}\\[2ex]\varphi=\dfrac{\pi}{2}:\;\dfrac{P_2\,l\,h}{3\,C\,\Phi}=0{,}588,\quad\dfrac{G_2\,l^2}{C\,h\,\Phi}=1{,}886,\quad\dfrac{P_2}{Z}=13{,}05,\quad\dfrac{G_2}{Z}=-5{,}84.\end{cases}$$

Hierbei ist die Genauigkeit für P_2 0,5 %, für G_2 2 bzw. 4 %. Ferner sind nach den im Anfang gegebenen Daten der Aufgabe:

$$\frac{3\,C\,\Phi}{l\,h}=22{,}2\,Z,\qquad\frac{C\,\Phi\,h}{l^2}=3{,}1\,Z.$$

Nimmt man z. B. die Zentrifugalbelastung $Z=160\,\mathrm{kgcm}^{-2}$, so ergibt sich:

$$P_{2\,\max}=17{,}18\,Z=17{,}18\cdot 160=2750\,\mathrm{kgcm}^{-1}\text{ bei }\varphi=0,$$
$$G_{2\,\max}=-13{,}63\,Z=-13{,}63\cdot 160=-2180\,\mathrm{kg}\text{ bei }\varphi=0.$$

Die maximale Spannung entsteht also in der Außenfaser an der Mittellinie der Belastung und wird:

$$\sigma_{\max}=\frac{P_2}{2\,h}+\frac{G_2}{\frac{1}{6}(2\,h)^2}=\frac{2750}{6{,}8}+\frac{2180}{\frac{1}{6}\cdot 6{,}8^2}=405+283=688\,\mathrm{kgcm}^{-2}.$$

Bei reinen Normalspannungen, d. h. bei Auffassung der Zylinderschale als Membran, wäre nach den Gl. (1)

$$P_2=a\,Z=48\cdot 160\,\mathrm{kgcm}^{-1},\qquad\sigma=\frac{48\cdot 160}{6{,}8}=1130\,\mathrm{kgcm}^{-2}$$

also erheblich größer, oder mit anderen Worten:

Durch die Lastübertragung durch Biegungsfestigkeit in Richtung des Umfanges und in Längsrichtung nach den Auflagern hin wird die Maximalspannung um mehr als $^1/_3$ gegenüber der reinen Ringzugspannung heruntergedrückt.

Übrigens läßt sich die Auffassung der reinen Ringzugspannung auch aus anderen Gründen nicht konsequent durchführen, da dann ebenfalls nach den Gl. (1) für G_1, G_2 und $H=0$ bei der vorliegenden stückweisen Belastung $\dfrac{\partial P_2}{\partial\varphi}=\infty$ und deshalb an der Stelle $\varphi=60^0$ $\dfrac{\partial U}{\partial x}=\infty$ werden müßten.

Das Ovalwerden der Kappe läßt sich durch die Abweichung des Achsenverhältnisses von der Zahl 1 ausdrücken, nämlich:

$$\frac{1+3{,}12\,\dfrac{Z}{a}\cdot 10^{-5}}{1-5{,}86\,\dfrac{Z}{a}\cdot 10^{-5}}\approx 1+8{,}98\cdot 10^{-5}\,\frac{Z}{a}=1+2{,}991\cdot 10^{-4}.$$

Die größte Durchmesseränderung tritt an der Stelle $\varphi=0$ ein und beträgt:

$$2\,w_{\max}=2\cdot 5{,}86\cdot 160\cdot 10^{-5}=1{,}872\cdot 10^{-2}\,\mathrm{cm}=0{,}1872\,\mathrm{mm},$$

d. i. ungefähr $4\cdot 10^{-4}$ des Durchmessers.

Zu den Spannungen und Formänderungen infolge der hier eingeführten stückweisen Zentrifugalbelastung sind offenbar noch die entsprechenden Größen infolge der vollkommen axialsymmetrischen Zentrifugalbelastung durch die Eigenmasse der Trommel hinzuzufügen, deren Berechnung als bekannt vorausgesetzt werden darf.

Die dargestellte besonders kurze Berechnungsmethode ist nicht nur wie hier auf stückweise belastete, rotierende Zylinderschalen, sondern auch auf Bauwerke, wie schiefbelastete Gewölbe unter besonderen Stützungsbedingungen, Rohrleitungen unter Gebirgsdruck, Flüssigkeitsbehälter und Walzenwehre anwendbar. M 17

Über die Charlier-Jordansche Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach der Poissonschen Funktion und ihren Ableitungen.

Von *Erhard Schmidt* in Berlin.

Einleitung. Die Poissonsche Funktion, die für die Statistik sogenannter „seltener Ereignisse" grundlegend ist, wird gegeben durch die Gleichung

$$\psi_0(x) = \frac{a^x}{x!} e^{-a}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots \qquad (1).$$

Nach Charlier[1]) definiert man die Funktionen $\psi_\nu(x)$ durch die Rekursionsformel

$$\psi_\nu(x) = \psi_{\nu-1}(x-1) - \psi_{\nu-1}(x), \quad \nu = 1, 2, \ldots \qquad (2).$$

Aus der Identität
$$\frac{d}{da}(\psi_0(x)) = \psi_0(x-1) - \psi_0(x)$$

folgt durch $(\nu-1)$-fache Differentiation nach a die Gültigkeit der Rekursionsformel (2) für die ν-ten Ableitungen von $\psi_0(x)$. So ergeben sich die Jordanschen Formeln

$$\psi_n(x) = \frac{d^n}{da^n}(\psi_0(x)) = \psi_0(x) \cdot p_n(x) \quad (3), \qquad p_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu}\binom{x}{\nu} \nu! \cdot a^{-\nu} \quad (4).$$

Da hier die Summation rechts nur bis zur kleineren der beiden nicht negativen ganzen Zahlen n und x, mithin also bis zu einem bei Vertauschung von n und x sich nicht ändernden Index erstreckt zu werden braucht, so ergeben sich die Symmetrierelationen

$$(-1)^n p_n(x) = (-1)^x p_x(n) \qquad (5),$$

auf welche Szegö zuerst aufmerksam gemacht hat. Ferner gelten die Charlierschen Orthogonalitätsrelationen

$$\sum_{x=0}^{\infty} p_m(x)\,\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ n!\,a^{-n} & m = n \end{cases} \qquad (6),$$

für welche unten ein Beweis folgt.

Charlier und Jordan haben nun eine willkürliche arithmetische Verteilung $v(x)$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ nach den Funktionen $\psi_n(x)$ entwickelt. Setzt man

$$v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n(x) \qquad (7),$$

so liefern die Orthogonalitätsrelationen (6) den Ansatz

$$a_n = \frac{a^n}{n!} \sum_{x=0}^{\infty} v(x)\, p_n(x) \qquad (8).$$

Die erste, welche einen Beweis des Entwicklungssatzes (7, 8) auf Grund eines hinreichenden Systems von Bedingungen für die Funktion $v(x)$ (unter Benutzung des Momentensatzes) gegeben hat, ist Frau Pollaczek-Geiringer. Ihr Resultat ist durch Szegö verbessert worden, welcher unter Heranziehung der Hilbertschen Theorie der unendlich vielen Variablen die Gültigkeit des Entwicklungssatzes unter der Bedingung der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} (v(\nu))^2 \nu!\, a^{-\nu}$ bewies. Das Szegösche Kriterium ist mit neuen sehr einfachen Methoden noch von Jacob verschärft worden. Das schönste Resultat erzielte Uspensky, der im Jahre 1931 den Entwicklungssatz unter der Bedingung bewies, daß der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} v(\nu) z^\nu$ größer als 2 ist.

Angeregt durch die mir vor ihrer Veröffentlichung bekannt gewordenen Untersuchungen von Frau Pollaczek-Geiringer habe ich im Jahre 1928 in der Preußischen Akademie der Wissenschaften die nachstehenden Sätze und Beweise vorgetragen[2]).

[1]) Die in der Einleitung erwähnte Literatur sei hier zusammengestellt:
Charlier: Über das Fehlergesetz, Ark. f. Mat. 2, Nr. 8, und Über die Darstellung willkürlicher Funktionen, ebenda Nr. 20. — Ch. Jordan: Sur la probabilité des épreuves répétées, Bull. d. l. soc. math. 54 (1926), S. 1 bis 37. — H. Pollaczek-Geiringer: Die Charliersche Entwicklung willkürlicher Verteilungen, Skandinavisk Aktuarietidsskrift 1928, S. 98 bis 111. — M. Jacob: Über die Charliersche B-Reihe, Skandinavisk Aktuarietidsskrift 1932, S. 286 bis 291. — J. V. Uspensky: On the Jordans series of probability, Ann. of Math. (2), 32 (1931), S. 306 bis 312. — Die Ergebnisse von G. Szegö sind nur brieflich mitgeteilt worden.

[2]) Sitzungsberichte der Preuß. Akad. d. Wiss. 1928, S. 148.

I. Für $v(x) \geqq 0$ (dem in der Wahrscheinlichkeitsrechnung allein interessierenden Falle) ist die notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Entwicklungssatzes (7, 8) das Bestehen der Limesgleichungen

$$\lim_{\nu=\infty} v(\nu)\, 2^{\nu}\, \nu^{k} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

für alle ganzen $k \geqq 0$.

II. Läßt man Zeichenwechsel der Funktion $v(x)$ zu, so ist der Entwicklungssatz gültig, wenn die durch die Gleichung

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' v(\nu)\, z^{\nu} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

gegebene analytische Funktion $F(z)$ im Innern der beiden Kreise $|z| < 1$, $|z-1| < 1$ regulär und einschließlich der beiden Peripherien mit allen ihren Ableitungen noch stetig ist.

§ 1. Beweis des Entwicklungssatzes II.

Differentiiert man die beiderseits mit e^{a} multiplizierte Identität (1) k-mal nach a, so ergibt sich nach der Leibnizschen Regel wegen (3)

$$x(x-1)\ldots(x-k+1) = a^{k} \sum_{\nu=0}^{k}{}' \binom{k}{\nu} p_{\nu}(x) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Aus der für den Entwicklungssatz notwendigen Konvergenz der Reihe (8) für alle ganzen $n \geqq 0$ folgt nunmehr wegen (11) die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{x=0}^{\infty}{}' v(x)\, x(x-1)\ldots(x-k+1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

für alle ganzen $k \geqq 0$ (wobei für $k=0$ der Faktor von $v(x)$ natürlich gleich 1 zu setzen ist) und wegen (4) das Umgekehrte. Aus (12) folgt die Konvergenz der Reihen

$$\sum_{x=0}^{\infty}{}' v(x) \cdot x^{k} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

für alle ganzen $k \geqq 0$ und umgekehrt. Aus der Konvergenz der Reihen (13) ergeben sich die Gleichungen

$$\lim_{x=\infty} v(x)\, x^{k} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

für alle ganzen $k \geqq 0$. Ersetzt man in den letzten Gleichungen k durch $k+2$, so ergibt sich aus ihnen umgekehrt sogar die absolute Konvergenz der Reihen (13) und mithin auch die absolute Konvergenz der Reihen (12) und der Reihen (8) für alle n. Wir sehen also, daß die sieben Aussagen der Konvergenz der Reihen (8) für alle ganzen $n \geqq 0$, ihrer absoluten Konvergenz, der Konvergenz der Reihen (12) für alle ganzen $k \geqq 0$, ihrer absoluten Konvergenz, der Konvergenz der Reihen (13) für alle ganzen $k \geqq 0$, ihrer absoluten Konvergenz und der Limesgleichungen (14) für alle ganzen $k \geqq 0$ in dem Sinn miteinander gleichwertig sind, daß aus jeder die sechs übrigen folgen. (15) Endlich sagt die absolute Konvergenz der Reihen (12) aus, daß die Potenzreihe (10) mit allen ihren gliedweise gebildeten Ableitungen noch auf dem Einheitskreise absolut konvergiert. Also muß die analytische Funktion $F(z)$ im Innern des Einheitskreises regulär und dort einschließlich der Peripherie mit allen ihren Ableitungen stetig sein, (16) wobei an der Peripherie des Einheitskreises die Ableitungen natürlich nur nach Innen gesichert sind.

Ist umgekehrt die letzte Aussage erfüllt, so ist für alle ν

$$\left| v(\nu)\, \nu^{k+1} \right| \cdot \frac{\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k)}{\nu^{k+1}} = \left| v(\nu) \cdot \nu(\nu-1)\ldots(\nu-k) \right| \leqq M_{k+1} = \operatorname*{Max}_{|z| \leqq 1} \left| F(z)^{(k+1)} \right|$$

und mithin

$$\lim_{\nu=\infty} v(\nu) \cdot \nu^{k} = 0$$

für alle ganzen $k \geqq 0$. Also ist auch die Aussage (16) mit jeder der sieben Aussagen (15) gleichwertig. Die Aussage (16) ist mithin eine notwendige Bedingung für den Entwicklungssatz.

Bei Berücksichtigung der Symmetrierelation (5) lassen sich die Gleichungen (7) folgendermaßen schreiben:

$$v(\nu) = (-1)^{\nu}\, \psi_{0}(\nu) \sum_{n=0}^{\infty}{}' (-1)^{n}\, a_{n}\, p_{\nu}(n) \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \quad \ldots\ldots \quad (17).$$

Wie oben ergibt sich jetzt, daß die durch den Entwicklungssatz postulierte Konvergenz der letzten Reihen für alle ganzen $\nu \geqq 0$ gleichwertig ist mit jeder der sieben Aussagen, der absoluten Konvergenz dieser Reihen, der Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n n^k$ für alle ganzen $k \geqq 0$, ihrer absoluten Konvergenz, der Konvergenz der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n n(n-1)\dots(n-k+1)$ für alle ganzen $k \geqq 0$, ihrer absoluten Konvergenz, der Limesgleichungen $\lim_{n=\infty} a_n n^k = 0$ für alle ganzen $k \geqq 0$ und endlich mit der Aussage, daß die durch die Gleichung $G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \zeta^n$ gegebene analytische Funktion im Einheitskreise regulär und mit allen ihren Ableitungen noch einschließlich der Peripherie stetig ist, wobei an dieser, wie in (16), die Ableitungen natürlich nur nach dem Innern des Einheitskreises gesichert sind. Die letzte Aussage (18) ist mithin ebenfalls eine für die Gültigkeit des Entwicklungssatzes notwendige Bedingung, freilich eine in dieser Form zunächst nicht brauchbare. (18) (19)

Wie hängen nun die analytischen Funktionen $F(z)$ und $G(\zeta)$ miteinander zusammen? Zur Beantwortung dieser Frage gehe man von der Leibnizschen Formel aus:

$$\frac{d^n}{dz^n}(e^{-az} \cdot F(z)) = e^{-az} \sum_{\varrho=0}^{n} (-1)^{n-\varrho} a^{n-\varrho} \binom{n}{\varrho} F^{(\varrho)}(z).$$

Setzt man hier $z = 1$ und berücksichtigt, daß wegen (16) die in das Innere des Einheitskreises gerichteten Ableitungen von $F(z)$ an der Stelle $z = 1$ durch gliedweise Differentiation der Reihe (10) gebildet werden können, wobei die so entstandenen Reihen noch absolut konvergieren, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(e^{-az} F(z))_{z=1} &= e^{-a}\frac{a^n}{n!}\sum_{\varrho=0}^{n}(-1)^{n-\varrho} a^{-\varrho}\binom{n}{\varrho}\sum_{\nu=0}^{\infty} v(\nu)\,\nu(\nu-1)\dots(\nu-\varrho+1) \\ &= e^{-a}\frac{a^n}{n!}\sum_{\nu=0}^{\infty} v(\nu)\,p_n(\nu) = e^{-a} a_n \end{aligned}\right\} \quad (20).$$

Man mache nun die Voraussetzung, daß der Punkt $z = 1$ kein singulärer Punkt der Funktion $F(z)$ ist. Dann ist $z = 1$ auch kein singulärer Punkt der Funktion $e^{-az} F(z)$. Die Differentialquotienten auf der linken Seite von (20) sind die regulären, und man erhält als analytische Fortsetzung der Funktion $e^{-az} F(z)$ in der Umgebung des Punktes 1, wenn $z = 1 - \zeta$ gesetzt wird, die Reihe $e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n \zeta^n = e^{-a} G(\zeta)$.

Aus (18) und (19) folgt nunmehr, daß die analytische Fortsetzung $e^{-a} G(\zeta)$ im Innern des ganzen Kreises $|\zeta| = |z-1| < 1$ regulär und einschließlich seiner Peripherie mit allen Ableitungen stetig sein muß. Unter der Voraussetzung, daß $z = 1$ keine singuläre Stelle der Funktion $F(z)$ ist, ergibt sich also zunächst als notwendige Bedingung für die Gültigkeit des Entwicklungssatzes die Bedingung II.

Diese Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn man erhält etwa für $0 < z \leqq 1$, z reell

$$e^{-az} F(z) = e^{-a} G(\zeta), \quad z = 1 - \zeta; \quad e^{-a\zeta} G(\zeta) = F(z).$$

Da die Funktion $G(\zeta)$ denselben Voraussetzungen genügt wie $F(z)$ und die Stelle $\zeta = 1$, $z = 0$ regulär ist, so ergibt sich wie in (20)

$$v(\nu) = \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}(F(z))_{z=0} = (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{d\zeta^\nu}(e^{-a\zeta} G(\zeta))_{\zeta=1} = (-1)^\nu \psi_0(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n p_\nu(n),$$

also die Gl. (17), welche mit der zu beweisenden Gl. (7) gleichbedeutend ist.

Damit ist der Satz II bewiesen, und es ergibt sich als allerdings naheliegendes Korollar, daß im Falle der Gültigkeit des Entwicklungssatzes die Reihen auf den rechten Seiten von (7) und (8) nicht nur konvergieren, sondern sogar absolut konvergieren müssen.

Beim Beweise des Entwicklungssatzes II sind die Orthogonalitätsrelationen (6) nicht benutzt worden. Sie ergeben sich aber natürlich unmittelbar aus dem Entwicklungssatz. Man setze dazu $F(z) = z^t$ oder mit anderen Worten

$$v(\nu) = 1 \text{ für } \nu = t, \quad v(\nu) = 0 \text{ für } \nu \neq t \quad \dots\dots\dots\dots \quad (21).$$

Die Bedingung für die Gültigkeit des Entwicklungssatzes ist für diese Funktion erfüllt. Es ergibt sich also aus (5) und (8)

$$n!\,a_n = a^n\,p_n(t) = (-1)^n\,a^n\,(-1)^t\,p_t(n) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

und aus (17), (22) und (3)

$$v(\nu) = (-1)^{t+\nu}\,\psi_0(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{a^n}{n!}\,p_t(n)\,p_\nu(n) = (-1)^{t+\nu}\frac{a^\nu}{\nu!}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\psi_0(n)\,p_t(n)\,p_\nu(n)$$

$$= (-1)^{t-\nu}\frac{a^\nu}{\nu!}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\psi_t(n)\,p_\nu(n)\,.$$

Das sind wegen (21) die Orthogonalitätsrelationen (6).

§ 2. Beweis des Entwicklungssatzes I.

Die Bedingung I ist, wie bei der Herleitung von (16) gezeigt, gleichwertig mit der Aussage, daß die Funktion $F(z)$ für $|z| < 2$ regulär und einschließlich der Kreisperipherie $|z| = 2$ noch mit allen Ableitungen stetig ist. Also enthält die Bedingung I die Bedingung II und ist mithin ohne jede Voraussetzung über das Vorzeichen der Funktion $v(x)$ für den Entwicklungssatz hinreichend.

Es handelt sich also nur noch darum, zu zeigen, daß für $v(x) \geq 0$ die Bedingung I notwendig ist. Da wegen (18) die Potenzreihe $G(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty}{}' a_n(-\zeta)^n$ für $|\zeta| \leq 1$ und die Potenzreihe $e^{-a\zeta} = \sum_{\mu=0}^{\infty}{}'\frac{a^\mu(-\zeta)^\mu}{\mu!}$ für jeden Wert von ζ absolut konvergent sind, so kann man sie gewöhnlich ausmultiplizieren und erhält

$$e^{-a\zeta}\,G(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}{}'(-\zeta)^k\sum_{\lambda=0}^{\infty}{}'\frac{a^{k-\lambda}}{(k-\lambda)!}\,a_\lambda = \sum_{k=0}^{\infty}{}'(-\zeta)^k\sum_{\lambda=0}^{k}{}'\frac{a^k}{(k-\lambda)!\,\lambda!}\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'v(\nu)\,p_\lambda(\nu) \qquad \text{wegen (8)}$$

$$e^{-a\zeta}\,G(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{(-\zeta)^k}{k!}\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'v(\nu)\,a^k\sum_{\lambda=0}^{k}{}'\binom{k}{\lambda}p_\lambda(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty}{}'\frac{(-\zeta)^k}{k!}\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'v(\nu)\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1) \qquad \text{wegen (11).}$$

Setzt man hier $-\zeta = w$, $0 < w \leq 1$, w reell, so ist der letzte Ausdruck rechts eine Doppelreihe mit lauter nichtnegativen Gliedern. Mithin lassen sich die beiden Summationen vertauschen, und es ergibt sich

$$e^{aw}\,G(-w) = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}'v(\nu)\,(1+w)^\nu\,.$$

Für $w = 1$ folgt hieraus zunächst die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'v(\nu)\,2^\nu$. Also muß jedenfalls die Potenzreihe (10) für $|z| < 2$ regulär sein.

Wegen (18) existiert aber auch der Grenzwert

$$g_k = \lim_{w=1}\frac{d^k}{d\,w^k}\left(e^{aw}\,G(-w)\right) = \lim_{w=1}\sum_{\nu=k}^{\infty}{}'v(\nu)\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)\,(1+w)^{\nu-k}\,.$$

Mithin ist

$$\lim_{w=1}\sum_{\nu=k}^{k+m}{}'v(\nu)\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)\,(1+w)^{\nu-k} \leq g_k\,,$$

$$\sum_{\nu=k}^{k+m}{}'v(\nu)\,2^\nu\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1) \leq 2^k\,g_k\,.$$

Da diese Ungleichung für jedes m gilt, so folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=k}^{\infty}{}'v(\nu)\,2^\nu\,\nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1)$. Diese Konvergenz findet aber für alle ganzen positiven Zahlen k statt. Daher ergeben sich wegen (15) die Limesgleichungen (9), womit der allein noch ausstehende Beweis der N o t w e n d i g k e i t der Bedingungen I geführt ist.

Zum Schluß sei noch bemerkt, daß in den Sätzen I und II keinerlei Voraussetzungen über den Parameter a gemacht werden. a darf also beliebige positive, negative oder komplexe Werte annehmen. Ebenso darf im Satze II die Funktion $v(x)$ komplex sein.

Endlich möchte ich noch auf folgendes hinweisen: Da die hinreichenden Bedingungen II, wie oben gezeigt, auch notwendig sind, wenn $z = 1$ eine reguläre Stelle der analytischen Funktion $F(z)$ ist, so lassen die oben ausgeführten Ergebnisse allein die Frage noch offen, ob überhaupt und wann der Entwicklungssatz noch gültig sein kann, wenn $z = 1$ eine singuläre Stelle der Funktion $F(z)$ ist.

M 23

Die Kriecherscheinungen, ein neuer technisch wichtiger Aufgabenkreis der Elastizitätstheorie.

Von *A. Stodola* in Zürich.

Bei höheren Temperaturen geraten die meisten im Maschinenbau verwendeten metallischen Baustoffe, wenn in Spannungszustand versetzt, in eine plastische Verformung, die mit dem „Fließen" bei Überschreitung der Elastizitätsgrenze sehr verwandt ist, sich davon anderseits dadurch wesentlich unterscheidet, daß die Verformung, zumindest bei Überschreitung einer gewissen Temperaturhöhe, wahrscheinlich bei jeder Größe der Beanspruchung auftritt und unaufhörlich andauert, solange die äußeren Kräfte wirken. Die Engländer nannten diesen Fließvorgang „creeping", d. h. „Kriechen", weil er im allgemeinen sehr langsam vor sich geht. Diejenige Größe der einfachen Zugbeanspruchung eines geraden Stabes, bei welcher das Kriechen 1/1000 eines Prozentes der Länge in einer Stunde erreicht, wird als „Dauerstandfestigkeit" bezeichnet, welche Bezeichnung wir wegen der Unabgegrenztheit gegen die „Dauerfestigkeit", die wieder eigentlich „Ermüdungsfestigkeit" heißen sollte, vermeiden und einfach von der

„K r i e c h g e s c h w i n d i g k e i t"

sprechen wollen, unter welcher die Größe der (spezifischen) Ausdehnung eines auf Zug beanspruchten Stabes in der Stunde zu verstehen ist.

Während sich beim gewöhnlichen Fließen ein Gleichgewichtsendzustand einstellt, verschwindet die Zeit aus den Gleichungen des Kriechvorganges überhaupt nicht, und darin besteht die Neuheit, Besonderheit, und somit auch das mathematische Interesse, das dieser neue Aufgabenkreis der Elastizitätslehre darbietet. Die technische Wichtigkeit der zu lösenden Probleme geht aus der fortwährenden Steigerung der Temperatur hervor, die wir im Höchstdruck-Dampfkessel- und Dampfturbinenbau, sowie insbesondere im sich nach wie vor regenden Gasturbinenbau erleben. Wichtige Teile dieser Maschinengattungen befinden sich in einem dauernden „Kriechzustand". Daß dabei ein stärkeres „Auseinanderkriechen" nicht gestattet werden darf, daß also die Kriechgeschwindigkeiten durchweg s e h r k l e i n b l e i b e n m ü s s e n, ist klar, ändert aber nichts an der Tatsache, daß, wie erwähnt, die Zeit in den Lösungsgleichungen explizite enthalten bleibt.

Auf Grund von Mitteilungen, die ich der Heraeus-Vacuumschmelze A.-G. in Hanau verdanke, konnte ich beispielsweise für einen $C_0\,10\,M$ benannten Stahl für die Kriechgeschwindigkeit vorläufig die angenäherte Formel

$$w = a\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^m \left(\frac{\sigma}{100}\right)^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

aufstellen, wo t die Celsiustemperatur, σ die Spannung in kg/cm², $a = 12{,}5 \cdot 10^{-9}$, $m = 6{,}63$, $n = 3{,}16$, $t_0 = 600$ bedeuten, mit einer Gültigkeit zwischen etwa 700 und 1000 °C und Zugspannungen zwischen 0 und 500 kg/cm². Ob die Aufspaltung in ein Produkt von Funktionen der Temperatur und der Spannung allein bei andern Baustoffen aufrecht erhalten werden kann, ist ungewiß. Für das Nachfolgende gehen wir von der wahrscheinlichen Annahme aus, daß sich bei Einwirkung von Druckspannungen eine mit Gl. (1) gleichgroße Stauchgeschwindigkeit einstellen wird, und behandeln als Beispiel für den e i n a c h s i g e n S p a n n u n g s z u s t a n d eine Biegungsaufgabe, an welcher die Besonderheit des neuen Fließvorganges deutlich zum Ausdruck gelangt.

Die Kriechverformung eines auf Biegung beanspruchten Stabes. Der Stab sei parallel zu einer Drehachse im Abstande R von derselben an einem Ende starr gelagert, am andern Ende frei. Auf ein Element $d\xi$ Abb. 1 des in Drehung versetzten Stabes wirkt bei rechteckigem Querschnitt mit b als Breite, $h = 2h'$ als Höhe, die Fliehkraft

$$d\,P = b\,h\,\mu\,d\,\xi\;R\,\omega^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1\mathrm{a}),$$

worin $\mu = 8 \cdot 10^{-6}$ die spezifische Masse, $R =$ der Halbmesser in cm, $\omega =$ die Drehschnelle bedeuten. Im Abstand x wird ein Biegungsmoment

$$M = \int_0^x d\,P\,(x-\xi) = \mu\,R\,\omega^2\,b \int_0^x h\,(x-\xi)\,d\,\xi \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

erzeugt, welches seinerseits als Biegungsspannung im Abstande η von der neutralen Faser vor Eintritt des Kriechens die Spannung

$$\sigma = \frac{M}{W_b}\left(\frac{\eta}{h'}\right) = \frac{M\eta}{\frac{2}{3}\,b\,h'^3} = \frac{M\eta}{J} \qquad (3)$$

hervorruft. Infolgedessen geraten die Fasern ins Fließen mit der Kriechgeschwindigkeit nach Gl. (1).

Wir machen die in Biegungsproblemen übliche Annahme, daß die Querschnitte trotz der Schubspannungen eben bleiben. Die gesamte Ausdehnung der Elementarfaser ist $\eta\,\psi\,d\,x$ und setzt sich zusammen aus dem elastischen Anteil $\sigma\,d\,x/E$ und dem während der Zeit 0 bis z Stunden zustande gekommenen Kriechbetrag $\int_0^z w\,d\,x\,d\,z$. Nach Kürzung mit $d\,x$ lautet die Grundgleichung

$$\frac{\sigma}{E} + \int_0^z w\,d\,z = \eta\,\psi(z) \qquad (4),$$

wobei die Zeitabhängigkeit des ψ hervorgehoben ist. Diese Beziehung nimmt die Gestalt einer Differentialgleichung an, wenn wir sie nach z differentiieren:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial z} + E\,w = E\,\eta\,\frac{\partial\psi(z)}{\partial z} \qquad (4a).$$

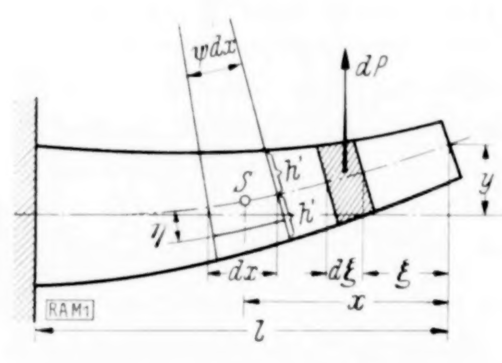


Abb. 1.

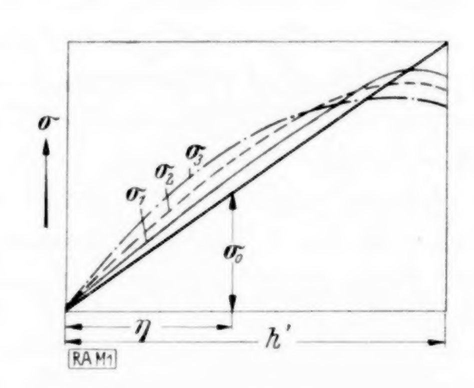


Abb. 2.

Für den Zeitpunkt $z=0$ ist durch die Außenkräfte und die Querschnittsform die Verteilung der Spannung vorgeschrieben. Um von diesem Anfangszustand aus die Spannungsverteilung und das Kriechen im Verlauf der Zeit darzustellen, müßte man Gl. (4a) allgemein integrieren, d. h. σ als Funktion sowohl von η wie von z, unter Berücksichtigung von (2) und (3) darstellen, was mathematisch wohl schwer durchführbar sein dürfte. Eine graphische Integration hingegen führt bequem zum Ziel. Zu diesem Behufe nehmen wir an, daß im Zeitpunkt $z=0$ der Stab noch gerade ist und die Fliehkraft bei vollentwickelter Temperatur gerade zu wirken begonnen habe. Man kann M allgemein als Abhängige von x als

$$M = F(x) \qquad (5)$$

darstellen, so zwar, daß für jeden Abstand x dessen Betrag unveränderlich bleibt. Die anfängliche Spannungsverteilung ist durch (3) gegeben. Während des Zeitelementes δz ergibt sich nach (4a) ein Spannungszuwachs (algebraisch)

$$(\delta\sigma)_1 = E\left[\eta\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_1 - w_1\right]\delta z_1 \qquad (6)$$

mit $w_1 = B(\sigma_0)^n$, wo

$$B = a\left(\frac{t-t_0}{100}\right)^m \frac{1}{100^n} \qquad (7)$$

aber einem noch unbekannten $\partial\psi/\partial z$. Dieses bestimmt sich aus der Forderung, daß das Moment M unveränderlich bleibe, d. h. mit

$$\sigma_1 = \sigma_0 + (\delta\sigma)_1 \qquad (7a)$$

$$M = \int_{-h'}^{+h'} b\,\sigma_1\,\eta\,d\eta = \int b\,(\sigma_0 + \delta\sigma_1)\,\eta\,d\eta = \int b\,\sigma_0\,\eta\,d\eta + \int b\,E\,(\eta\,\delta\psi - w_1\,\delta z_1)\,\eta\,d\eta\,.$$

Da aber $\int b\sigma_0 \eta\, d\eta = M$, so erhält man die Auflösung

$$\delta\psi_1 = \frac{\partial\psi}{\partial z}\delta z_1 = \int_0^{+h'} \frac{2\, b\, B\, (\sigma_0)^n\, \eta\, d\eta}{J}\, \delta z_1 \qquad \text{mit } J = \frac{2}{3}\, b\, h'^3 \quad \ldots\ldots \quad (8).$$

Nun ergibt Gl. (6) den endgültigen Wert von $(\delta\sigma)_1$ und Gl. (6a) das endgültige σ_1. Mit diesem rechnet man für das Zeitteilchen δz_2 die neue Änderung

$$\delta\psi_2 = \frac{2\int_0^{h'} b\, B\, (\sigma_1)^n\, \eta\, d\eta}{J}\, \delta z_2 \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

die neue Spannung $\delta\sigma_2$ und σ_2 und so fort.

Auf solcher Grundlage durchgeführte Orientierungsrechnungen lassen nun erkennen, daß, wie Abb. 2 darstellt, der durch die gerade Linie veranschaulichte anfängliche Spannungsverlauf sehr rasch gegen eine bestimmte Kurvenform konvergiert. Der Verlauf dieses **stationären Kriechzustandes**, bei welchem ein mit der Zeit verhältnisgleiches Kriechen bei unveränderlich bleibender Spannungsverteilung stattfindet, kann glücklicherweise aus der Grundgleichung (4a) leicht abgeleitet werden. Diese liefert, mit $\frac{\partial\sigma}{\partial z} = 0$:

$$w = \eta \cdot \frac{\partial\psi}{\partial z} = B \cdot \sigma^n \qquad \text{oder} \qquad \sigma = \left(\frac{\eta}{B}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^{\frac{1}{n}} \quad \ldots\ldots \quad (10).$$

Der Betrag des stets gleichen $\partial\psi/\partial z$ wird aus der Momentengleichung ermittelt:

$$M = 2\int_0^{+h'} b\,\sigma\cdot\eta\cdot d\eta = 2\int b\cdot\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{n}}\cdot\eta^{1+\frac{1}{n}}\, d\eta = 2\, b\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{1}{B}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{(h')^{2+\frac{1}{n}}}{2+\frac{1}{n}} = \left(\frac{\dot\psi\, h'}{B}\right)^{\frac{1}{n}}\frac{2\, b\,(h')^2}{2+\frac{1}{n}} \quad (10a),$$

oder wenn σ_{a_0} die im Anfangszustand in der äußersten Faser herrschende Spannung bedeutet, die sich aus Gleichung $\sigma_{a_0} = \frac{M}{J}\, h' = M \Big/ \frac{2}{3}\, h'^2\, b$ bestimmt, aus welcher Gleichung M in (10a) einzuschieben ist:

$$\left(\frac{\dot\psi\, h'}{B}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2\, n + 1}{3\, n}\,\sigma_{a_0} \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Daraus bestimmt sich hinwieder mit (10)

$$\sigma = \frac{2\, n + 1}{3\, n}\,\sigma_{a_0}\cdot\left(\frac{\eta}{h'}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Insbesondere herrscht in der äußersten Faser, mit $\eta = h'$,

$$\underline{\sigma_a = \frac{2\, n + 1}{3\, n}\,\sigma_{a_0}} \quad \ldots\ldots \quad (11a).$$

Für den Baustoff C_0 10 M war $n = 3{,}16$, somit wird

$$\sigma_a = \left[\frac{2\cdot 3{,}16 + 1}{3\cdot 3{,}16}\right]\cdot\sigma_{a_0} = 0{,}771\,\sigma_{a_0} \quad \ldots\ldots \quad (12).$$

Mithin ist

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{B}{h'}\cdot\sigma_a{}^n = \frac{w_a}{h'} \quad \ldots\ldots \quad (12a).$$

Die Stabverformung. Die im Zeitelement dz stattfindende Winkeländerung $\frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot dz$ bewirkt gemäß Abb. 1 eine Erhebung $dy = \frac{\partial\psi}{\partial z}\cdot dz\cdot dx\cdot x = \frac{w_a}{h'}\cdot dx\cdot x\cdot dz$ am Stabende. Da der Übergang zum stationären Zustand nur eine im Verhältnis kurze Zeit beansprucht, dürfen

wir für $\partial \psi / \partial z$ den Wert aus Gl. (12a) setzen, und erhalten für die endliche Zeit Z die gesamte Aufbiegung

$$Y = Z \int_0^l \frac{w_a}{h'} x\, dx = Z \int B (0{,}771\, \sigma_{a_0})^n \frac{x\, dx}{h'} \quad \ldots \quad (13).$$

Hierin ist $\sigma_{a_0} M h' / J$, und wir müssen M in Funktion von x allgemein darstellen. Wir nehmen an, der Stab sei gegen die Einspannungsstelle hin verstärkt, gemäß Gleichung

$$h' = h_0' \left(1 + a \frac{x}{l}\right) \quad \ldots \quad (13a).$$

Dann ist gemäß Gl. (2) $M = \mu R \omega^2 b \int_0^x 2 h' (x - \xi)\, d\xi$; oder mit $\mu R \omega^2 = \Omega$:

$$M = \Omega\, b\, 2 h_0\, l^2 \int_0^{\frac{x}{l}} \left(1 + a \frac{\xi}{l}\right)\left(\frac{x}{l} - \frac{\xi}{l}\right) d\left(\frac{\xi}{l}\right) = b\, \Omega\, h_0'\, l^2 \left|1 + \frac{a}{3} \frac{x}{l}\right| \left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad \ldots \quad (13b).$$

Dies in σ_{a_0} und Gl. (13) eingesetzt, ergibt mit der neuen Variablen $\zeta = \frac{x}{l}$

$$Y = C\, Z\, B \int_0^1 \frac{\zeta\, d\zeta}{(1 + a\, \zeta)} \left[\frac{\left(1 + \frac{a}{3} \zeta\right)(\zeta)^2}{(1 + a\, \zeta)^2}\right]^n \quad \ldots \quad (14) \quad \text{mit} \quad C = \left[\frac{3}{2} \frac{\Omega\, l^2}{h_0'} 0{,}771\right]^n \frac{l^2}{h_0'} \quad \ldots \quad (14a).$$

Das Integral stellt eine reine Zahl und kann graphisch ermittelt werden. Für die Werte

	$a = 2{,}0$	$1{,}5$	$1{,}0$
erhält man	$K(a) = 3{,}09 \cdot 10^{-4}$	$8{,}40 \cdot 10^{-4}$	$31{,}9 \cdot 10^{-4}$,

also ist

$$Y = B\, C\, K(a)\, Z \quad \ldots \quad (15).$$

Aus dieser Beziehung würde man auch diejenige Temperatur berechnen können, die höchstens (als Mittelwert) zulässig ist, wenn man beispielsweise vorschreibt, daß die Verbiegung Y sich erst nach einer vorgegebenen Gesamtbetriebszeit Z ausbilden dürfe.

In bezug auf zweiachsige Spannungszustände liegen bis anhin über das Kriechen meines Wissens nur die Beobachtungen von Bailey vor[1]), der u. a. auch die Verformung eines Bleirohres mit Innendruck und veränderlichem achsialen Zug bei gewöhnlicher Temperatur zu Analogieschlüssen heranzieht. Bemerkenswert ist die Ableitung der Kriechgeschwindigkeit in Richtung der Hauptspannungen aus Beobachtung an einem reiner Drehbeanspruchung ausgesetzten Rohr. Ein weiteres Ergebnis, wonach die Kriechgeschwindigkeit in achsialer Richtung bei reinem Innendruck und durch Böden geschlossenem Rohr verschwindet, steht in merkwürdiger Übereinstimmung mit einer selbstverständlichen Forderung aus den klassischen Gleichungen der plastischen Verformungstheorie:

$$\varepsilon_1 = \beta \left[\sigma_1 - \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3)\right], \qquad \varepsilon_2 = \beta \left[\sigma_2 - \frac{1}{2}(\sigma_3 + \sigma_1)\right]$$

ähnlich ε_3. Wenn man hierin, wie für dünnwandige Rohre erlaubt, $\sigma_3 = 0$ setzt und die zwischen der Umfangsspannung σ_1 und der achsialen Spannung σ_2 am Rohr bestehende Beziehung $\sigma_1 = 2\sigma_2$ einführt, so folgt $\varepsilon_2 = 0$. Prof. Dr. Roš teilt mir mit, daß nach Untersuchungen an der Eidgen. Materialprüfanstalt in Zürich das kalte Fließen von Blei mit dem Kriechen von Metallen bei höheren Temperaturen nahe verwandt zu sein scheint. Auch bestätigt er die Gleichheit der Kriechgeschwindigkeit bei gleichgroßen Zug- und Druckspannungen für höhere Temperaturen. Ob diese Beobachtungstatsachen hinreichen, allgemeine Kriechverformungsgleichungen für dreiachsige Spannungszustände abzuleiten, sei dahingestellt. Das mitgeteilte einfache Anwendungsbeispiel möge als Anregung bewertet werden, das Interesse der ausgezeichneten Mitarbeiter dieser Zeitschrift sowie auch der Leiter unserer Baustoff-Prüfanstalten auf den neuen Aufgabenkreis hinzulenken. M 1

[1]) Engineering 1930 Bd. 129, S. 265, 327, 772 ff.

The Buckling Load for a rectangular Plate with four Clamped Edges.

Von *G. I. Taylor* in Cambridge.

Introduction and Summary. The stability of a rectangular plate subjected to thrusts in its plane and perpendicular to its edges has been completely discussed (a)[1]) when the edges are simply supported, (b)[2]) when two opposite edges are simply supported and two others clamped. The stability problem for an infinite strip subjected to equal and opposite shearing stresses along its edges has also been solved[3]).

In each of these cases the solution is relatively simple because a mode of disturbance is possible in which the displacement is a simple harmonic function of one of the coordinates and in such cases the displacement can be represented by, at most, four terms of simple mathematical form. When all the edges are clamped no simple displacement of this type is possible and no analysis of the stability of a rectangular plate subject to this edge condition has yet been given. Failing a complete solution Sezawa[4]), Timoshenko and others have assumed an arbitrary form of disturbance which satisfies the edge conditions but does not satisfy the proper differential equation. By calculating the strain energy of this arbitrary displacement they found an approximate value for the magnitude of the edge thrust which causes instability. Recently Sezawa[5]) has rediscussed the subject assuming a simple form of disturbance which satisfies the differential equation but does not satisfy the edge conditions except at the corners and the mid-points of the sides.

In the present paper a formal solution of the problem is given when all four edges are clamped. The forms of displacement which satisfy both the clamped edge condition and the differential equation of neutral equilibrium are found, and the magnitudes of the thrusts which are necessary in order to maintain these displacements are expressed as values which cause an infinite determinant to vanish.

The numerical work necessary for completing the solution in any given case is very heavy, but in one case, that of a square plate subjected to equal thrusts perpendicular to all its edges, some simplification is possible owing to symmetry. In this case the lowest critical edge thrust is calculated by finding the lowest roots of the determinants formed by taking the first 1, 2, 3, 4, and 5 rows and columns of the infinite determinant. It is found that the convergence is extremely rapid, the successive values of $X = \frac{4Pa^2}{D\pi^2}$ being $5 \cdot 00$, $5 \cdot 30$, $5 \cdot 308$, $5 \cdot 307$, $5 \cdot 304$, where P is the thrust and $2a$ is the length of the side of the square. $D = \frac{Eh^2}{12(1-\sigma^2)}$ and h is the thickness of the plate, E Young's modulus and σ Poisson's Ratio.

The value obtained for X by Sezawa in this case was $5 \cdot 61$ while that obtained by the Ritz strain energy method is $5 \cdot 33$. The extremely close agreement between this and the true value $5 \cdot 30$ is probably accidental.

The critical value of X for the square plate with simply supported edges is $2 \cdot 0$ while if two opposite edges are clamped and the others simply supported it is $3 \cdot 86$.

Formal solution of the Problem. The differential equation for elastic displacement w of a plane sheet subjected to stresses P_1 and P_2 parallel to rectangular axes ξ, η is

$$\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} + \frac{P_1}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{P_2}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = 0 \quad \ldots \quad (1),$$

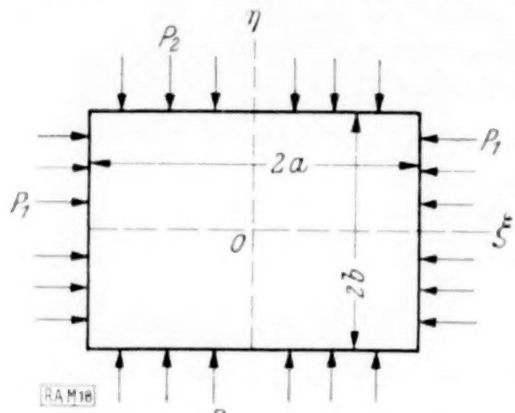
where $D = \frac{1}{12} Eh^2 (1-\sigma^2)^{-1}$. The sketch fig 1 shows the rectangular sheet loaded along its edges. Writing $\xi = 2ax/\pi$, $\eta = 2by/\pi$ the rectangle whose sides are $\xi = \pm a$, $\eta = \pm b$ is transformed into a square whose sides are $x = \pm \pi/2$, $y = \pm \pi/2$ and (1) becomes

$$\frac{1}{a^4}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2}{a^2 b^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{b^4}\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{4P_1 a^2}{D\pi^2}\left(\frac{1}{a^4}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{4P_2 b^2}{D\pi^2}\left(\frac{1}{b^4}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0 \quad \ldots \quad (2).$$

[1]) Bryan, Lond. Math. Soc. Proc. vol. 22, 1891, p. 54.
[2]) Reissner, Zentralbl. d. Bauverw. (Berlin) 1909, p. 93.
[3]) Southwell and Skan, London Roy Soc. Proc. A 1924, p. 582.
[4]) "On the Buckling under edge thrusts of a rectangular Plate Clamped at four Edges". Reports of the Aeronautical Research Institute, Tokyo, Imperial University no 69.
[5]) Loc. cit.

The problem is to find a solution of (2) other than $w=0$ which satisfies the condition $w=0$ at $x=\pm\frac{1}{2}\pi$ and $y=\pm\frac{1}{2}\pi$ and also the conditions $\frac{\partial w}{\partial x}=0$ at $x=\pm\frac{1}{2}\pi$ and $\frac{\partial w}{\partial y}=0$ at $y=\pm\frac{1}{2}\pi$.

The method adopted is first to find solutions of the differential equation (2) which satisfy $w=0$ at the edges. It is then shown that an infinite number of these can be combined together in such a way that the remaining "clamped edge" condition $\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial y}=0$ is also satisfied provided a certain relationship exists between the size and shape of the plate and the thrusts P_1 and P_2.



In the work which follows we shall only consider displacements which are symmetrical with respect to both axes, so that x and y occur in w only as even functions.

The function $e^{\alpha y}\cos nx$ satisfies the condition $w=0$ at $x=\pi/2$ provided n is an odd integer and it also satisfies (2) provided

$$\frac{a^4}{b^4}\alpha^4 - 2n^2\alpha^2\frac{a^2}{b^2} + n^4 - \frac{4P_1a^2}{D\pi^2}n^2 + \frac{4P_2b^2}{D\pi^2}\cdot\frac{a^4\alpha^2}{b^4} = 0 \quad \text{. . . . . (3).}$$

By a suitable combination of the four terms of type $e^{\alpha y}\cos nx$ an even function is obtained which satisfies $w=0$ at $y=\pm\pi/2$. These combinations will take different forms according as the roots of (3) are real, imaginary or complex.

Type I. If the two roots of (3), regarded as a quadratic in α^2, are positive, calling them α_n^2, β_n^2 the appropriate form is

$$w=\left(\cosh\alpha_n y\cosh\frac{1}{2}\beta_n\pi - \cosh\beta_n y\cosh\frac{1}{2}\alpha_n\pi\right)\cos nx.$$

Type II. If the two roots of (3) regarded as quadratic in α^2 are positive and negative let them be $-\alpha_n^2, \beta_n^2$. The required term is

$$w=\left(\cos\alpha_n y\cosh\frac{1}{2}\beta_n\pi - \cosh\beta_n y\cos\frac{1}{2}\alpha_n\pi\right)\cos nx.$$

Type III. If the four roots are pure imaginaries $\pm i\alpha, \pm i\beta$ the form is

$$w=\left(\cos\alpha_n y\cos\frac{1}{2}\beta_n\pi - \cos\beta_n y\cos\frac{1}{2}\alpha_n\pi\right)\cos nx.$$

Type IV. If the roots of (3) are complex they must be of the form $\pm\alpha\pm i\beta$ and the appropriate form for w is

$$w=\left(\cosh\alpha_n y\cos\beta_n y\sinh\frac{1}{2}\alpha_n\pi\sin\frac{1}{2}\beta_n\pi - \sinh\alpha_n y\sin\beta_n y\cosh\frac{1}{2}\alpha_n\pi\cos\frac{1}{2}\beta_n\pi\right)\cos nx.$$

In the work which follows only terms of type I will be referred to, assuming that in applying the results terms of other types are substituted where necessary.

If w is a function satisfying (1) then when w and $\frac{dw}{dn}$ are given at all points of a closed boundary, w is in general determined at all points within it $\frac{dw}{dn}$ being the rate of change in w along a normal to the boundary. It appears therefore that in order that a series of terms of type I may be capable of representing all possible values of w inside a square consistent with $w=0$ at its edges, it must be capable of representing arbitrary symmetrical distributions of $\frac{\partial w}{\partial y}$ along $y=\pm\frac{1}{2}\pi$ and of $\frac{\partial w}{\partial x}$ along $x\pm=\frac{1}{2}\pi$.

The single series

$$w=\sum_{n\,\text{odd}} A_n\left(\cosh\alpha_n y\cosh\frac{1}{2}\beta_n\pi - \cosh\beta_n y\cosh\frac{1}{2}\alpha_n\pi\right)\cos nx$$

is capable of representing any assigned distribution of $\frac{\partial w}{\partial y}$ along $y=\pm\frac{1}{2}\pi$ because any even function of x which vanishes at $\pm\pi/2$ can be expanded between the limits $\pm\pi/2$ in a cosine series of odd multiples of x.

Similarly the series

$$w = \sum_{n \text{ odd}} B_n \left(\cosh \gamma_n x \cosh \frac{1}{2} \delta_n \pi - \cosh \delta_n y \cosh \frac{1}{2} \gamma_n \pi\right) \cos n y$$

can represent any assigned symmetrical distribution of $\frac{\partial w}{\partial x}$ along the edges $x = \pm \frac{1}{2} \pi$, and if $\pm \gamma_n \pm \delta_n$, are the roots of the biquadratic

$$\frac{b^4}{a^4} \gamma^4 - 2 n^2 \gamma^2 \frac{b^2}{a^2} + n^4 - \frac{4 P_2 b^2}{D \pi^2} n^2 + \frac{4 P_1 a^2}{D \pi^2} \frac{b^4}{a^4} \gamma^2 = 0 \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

each term of the series satisfies (2).

Next consider the double series

$$\left.\begin{aligned} w = \sum_{n \text{ odd}} & A_n \left(\cosh \alpha_n y \cosh \frac{1}{2} \beta_n \pi - \cosh \beta_n y \cosh \frac{1}{2} \alpha_n \pi\right) \cos n x \\ & + B_n \left(\cosh \gamma_n x \cosh \frac{1}{2} \delta_n \pi - \cosh \delta_n x \cosh \frac{1}{2} \gamma_n \pi\right) \cos n y \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (5),$$

$$\left.\begin{aligned} \text{at } y = \pm \frac{1}{2} \pi, \frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{n \text{ odd}} & A_n \left(\alpha_n \sinh \frac{1}{2} \alpha_n \pi \cosh \frac{1}{2} \beta_n \pi - \beta_n \sinh \frac{1}{2} \beta_n \pi \cosh \frac{1}{2} \alpha_n \pi\right) \cos n x \\ & + (-1)^{\frac{n+1}{2}} n B_n \left(\cosh \gamma_n x \cosh \frac{1}{2} \delta_n \pi - \cosh \delta_n x \cosh \frac{1}{2} \gamma_n \pi\right) \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

If all the B's were known the second series in (6) would be a known function, $F(x)$, which could be expanded in a cosine series of odd multiples of x between the limits $x = \pm \frac{1}{2} \pi$. The given arbitrary distribution of $\frac{\partial w}{\partial y}$ could also be expressed in such a series, and the values of A_n would then be determined by equating coefficients of $\cos n x$. Similarly if the A's were known the values of B_n could be determined so that $\frac{\partial w}{\partial x}$ could have any arbitrary distribution along $x = \pm \pi/2$.

The double series (5) appears therefore to be capable of representing a function for which $\frac{\partial w}{\partial y}$ along $y = \pm \frac{1}{2} \pi$ and $\frac{\partial w}{\partial x}$ along $x = \pm \frac{1}{2} \pi$ have any given symmetrical distributions. The determination of the actual values of the A's and B's in any given case would necessitate the solution of an infinite series of linear equations.

If $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ along $x = \pm \frac{1}{2} \pi$ and $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ along $y = \pm \frac{1}{2} \pi$ the solution of this series of equations would in general yield the result that all the A's and all the B's are zero; but if a certain special relationship exists between the dimensions of the sheet and P_1 and P_2, namely that obtained by eliminating all the A's and B's from the system of linear equations then a displacement can exist in neutral equilibrium. The sheet is then in a condition of neutral stability, and all the A's and B's can be determined in terms of any one of their number.

To carry out the operations indicated above it is convenient after putting $x = \pi/2$ in (5) to expand each term of the A and the B series in (5) in a cosine series of even multiples of y. The coefficient of $\cos s y$ in the series so obtained is then equated to zero for each value (even) of s in order that the condition $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ may be satisfied at all points of the edges $x = \pm \pi/2$.

The necessary cosine series valid between $y = \pm \pi/2$ are

$$\cosh \alpha y = \frac{4 \alpha}{\pi} \sinh \frac{1}{2} \alpha \pi \left(\frac{1}{2 \alpha^2} - \frac{\cos 2 y}{\alpha^2 + 2^2} + \frac{\cos 4 y}{\alpha^2 + 4^2} - \ldots\right) \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

$$\cos \alpha y = \frac{4 \alpha}{\pi} \sin \frac{1}{2} \alpha \pi \left(\frac{1}{2 \alpha^2} - \frac{\cos 2 y}{\alpha^2 - 2^2} + \frac{\cos 4 y}{\alpha^2 - 4^2} - \ldots\right) \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

and if terms of type IV occur the expansions of $\cos \alpha y \cosh \beta y$ and $\sin \alpha y \sinh \beta y$ are also needed.

Inserting expansions of this type for $\cos n y$, $\cosh \alpha_n y$, $\cosh \beta_n y$ in the right hand side of (5) it is found that the condition $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ at $x = \pm \frac{1}{2} \pi$ is satisfied if for every (even) value of s

$$\frac{4}{\pi} (-1)^{\frac{1}{2} s} \sum_{n \text{ odd}} (-1)^{\frac{n+1}{2}} n (a_{ns} A_n - b_{ns} B_n) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

where a_{ns}, b_{ns} take different forms according to whether the corresponding term is of type I, II, III or IV.

If α_n, β_n occur in a term of type I

$$a_{ns} = \frac{\alpha_n \cosh \frac{1}{2}\beta_n \pi \sinh \frac{1}{2}\alpha_n \pi}{\alpha_n^2 + s^2} - \frac{\beta_n \cosh \frac{1}{2}\alpha_n \pi \sinh \frac{1}{2}\beta_n \pi}{\beta_n^2 + s^2} \quad \ldots \ldots \quad (10).$$

If they occur in a term of type II

$$a_{ns} = \frac{\alpha_n \cosh \frac{1}{2}\beta_n \pi \sin \frac{1}{2}\alpha_n \pi}{\alpha_n^2 - s^2} - \frac{\beta_n \cos \frac{1}{2}\alpha_n \pi \sinh \frac{1}{2}\beta_n \pi}{\beta_n^2 + s^2} \quad \ldots \ldots \quad (11).$$

similarly if γ_n and δ_n occur in a term of type I

$$b_{ns} = \left(\gamma_n \sinh \frac{1}{2}\gamma_n \pi \cosh \frac{1}{2}\delta_n \pi - \delta_n \sinh \frac{1}{2}\delta_n \pi \cosh \frac{1}{2}\gamma_n \pi\right)(n^2 - s^2)^{-1} \quad . \quad (12)$$

or if they occur in a term of type II

$$b_{ns} = \left(-\gamma_n \sin \frac{1}{2}\gamma_n \pi \cosh \frac{1}{2}\delta_n \pi - \delta_n \sinh \frac{1}{2}\delta_n \pi \cos \frac{1}{2}\gamma_n \pi\right)(n^2 - s^2)^{-1} \quad . \quad (13).$$

Permuting x and y the condition $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ at $y = \pm \frac{1}{2}\pi$ leads to

$$\frac{4}{\pi}(-1)^{\frac{1}{2}s} \sum (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} n (c_{ns} B_n - d_{ns} A_n) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (14),$$

where again c_{ns}, d_{ns} take various forms according as they are derived from terms of types I, II, III or IV. For instance if $\alpha_n \beta_n$ and also $\gamma_n \delta_n$ are each derived from terms of type I

$$c_{ns} = \frac{\gamma_n \cosh \frac{1}{2}\delta_n \pi \sinh \frac{1}{2}\gamma_n \pi}{\gamma_n^2 + s^2} - \frac{\delta_n \cosh \frac{1}{2}\gamma_n \pi \sinh \frac{1}{2}\delta_n \pi}{\delta_n^2 + s^2} \quad \ldots \ldots \quad (15),$$

$$d_{ns} = \left(\alpha_n \sinh \frac{1}{2}\alpha_n \pi \cosh \frac{1}{2}\beta_n \pi - \beta_n \sinh \frac{1}{2}\beta_n \pi \cosh \frac{1}{2}\alpha_n \pi\right)(n^2 - s^2)^{-1} \quad (16).$$

Eliminating the A's and B's between (9) and (14) we obtain the infinite determinant equation:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{10} & b_{10} & a_{30} & b_{30} & a_{50} & \ldots \\ d_{10} & c_{10} & d_{30} & c_{30} & d_{50} & \ldots \\ a_{12} & b_{12} & a_{32} & b_{32} & a_{52} & \ldots \\ d_{12} & c_{12} & d_{32} & c_{32} & d_{52} & \ldots \\ - & - & - & - & - & \ldots \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (17), \ (18).$$

When a and b are fixed the only variables remaining in Δ are P_1 and P_2, so that $\Delta = 0$ is a critical equation determining the special values of P_1 and P_2 at which elastic displacements can exist in neutral equilibrium when all four edges of the plate are clamped.

Though the analysis here given takes account only of symmetrical modes the same method could be applied to find antisymmetrical modes.

The solution expressed by (17) is merely formal. To find out whether it can be used to determine actual values of the buckling loads for a rectangular plate we must examine its convergence. For this purpose we may form a series of finite determinants Δ_1, Δ_2, $\Delta_3 \ldots \Delta_N$ by taking $2, 4, 6, \ldots 2N$ rows and columns starting at the left hand top corner of Δ, so that $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{10} & b_{10} \\ d_{10} & c_{10} \end{vmatrix}$ etc. If it is found that any root of $\Delta_N = 0$ converges to a definite limit as N increases this root represents a possible condition for which an elastic displacement can exist in neutral equilibrium.

It is difficult to give the matter any general treatment, accordingly I have taken a particular case, namely that of a square plate under equal thrusts perpendicular to all its four edges, and have calculated the smallest roots of Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 and Δ_5 with a view to finding out whether they converge to a definite limit.

Stability of a square plate with clamped edges under uniform thrust in all directions in its plane. Taking $2a$ as the length of the side and P as the load per unit length applied along the four sides we shall represent $\frac{4\,Pa^2}{\pi^2 D}$ which is a pure number, by X.

We may express the problem in non-dimensional form as follows:

"It is required to find the lowest value of X for which $\Delta^4 w + X\,\Delta^2 w = 0$ can be satisfied over the square contained between $x = \pm\,\pi/2$, $y = \pm\,\pi/2$, subject to the edge conditions $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ along $x = \pm\,\frac{1}{2}\pi$ and $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial y} = 0$ along $y = \pm\,\frac{1}{2}\pi$."

In the present case (3) becomes

$$(\alpha^2 - n^2)^2 + X\,(\alpha^2 - n^2) = 0 \quad \text{or}\; (\alpha^2 - n^2 + X)\,(\alpha^2 - n^2) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (19),$$

while (4) has the samé form, namely

$$(\gamma^2 - n^2 + X)\,(\gamma^2 - n^2) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20).$$

It appears therefore that if $n^2 > X$ the corresponding terms in both series of (5) are of type I and

$$\alpha_n = \gamma_n = \sqrt{n^2 - X}\,,\; \beta_n = \delta_n = n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21).$$

If $n^2 < X$ the corresponding terms of both series are of type II and

$$\alpha_n = \gamma_n = \sqrt{X - n^2}\,,\; \beta_n = \delta_n = n \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22).$$

No terms of types III or IV occur.

It seems likely that the lowest value of X consistent with instability will correspond with a displacement which is symmetrical with respect to x and y, accordingly we may search for a solution in which $A_n = B_n$. We may therefore assume for w the series

$$\begin{aligned} w = \sum_{n < X^{\frac{1}{2}}} A_n & \left[\begin{aligned} &\left(\cosh \tfrac{1}{2} n\pi \cos \sqrt{x - n^2}\, y - \cos \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{X - n^2} \cosh n y\right) \cos n x \\ &+\left(\cosh \tfrac{1}{2} n\pi \cos \sqrt{X - n^2}\, x - \cos \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{X - n^2} \cosh n x\right) \cos n y \end{aligned} \right] \\ + \sum_{n > X^{\frac{1}{2}}} A_n & \left[\begin{aligned} &\left(\cosh \tfrac{1}{2} n\pi \cosh \sqrt{n^2 - X}\, y - \cosh \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{n^2 - X} \cosh n y\right) \cos n x \\ &+\left(\cosh \tfrac{1}{2} n\pi \cosh \sqrt{n^2 - X}\, x - \cosh \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{n^2 - X} \cosh n x\right) \cos n y \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad . \quad (23)$$

Where n is an odd integer.

It seems clear that no value of X less than 1 can lead to a solution of the problem because even with simply supported edges (Bryan's problem) the smallest value of X giving neutral equilibrium is $2 \cdot 0$. The effect of clamping the edges must necessarily be to raise the load at which instability occurs. On the other hand it seems likely that there will be a solution in the range $1 < X < 9$. In this range of values of X the only terms of type II which occur are those for which $n = 1$. The next step is to calculate a_{ns}, b_{ns}. Since $\alpha_n = \gamma_n$ and $\beta_n = \delta_n$ it will be seen that $a_{ns} = c_{ns}$ and $b_{ns} = d_{ns}$.

Hence both (9) and (14) reduce to

$$\sum (-1)^{\frac{n+1}{2}}\, n\, A_n\,(a_{ns} - b_{ns}) = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (24).$$

In the special case of symmetrical displacements of a square plate under uniform edge load the number of rows and columns in Δ is therefore halved. The finite determinant Δ_N which in general contains $2\,N$ rows and columns is therefore reduced in this special case to one of N rows and columns, and the term in the nth column and s^{th} row is $a_{ns} - b_{ns}$.

The formulae used in calculating these terms are

$$n = 1,$$
$$a_{1s} - b_{1s} = \cos\frac{\pi}{2}\sqrt{X-1}\,\cosh\frac{\pi}{2}\left[\begin{aligned} &\sqrt{X-1}\,\tan\frac{\pi}{2}\sqrt{X-1}\left\{(X-1-s^2)^{-1} + (1-s^2)^{-1}\right\} \\ &+\tanh\frac{n\pi}{2}\left\{(1-s^2)^{-1} - (1+s^2)^{-1}\right\} \end{aligned}\right]^{6)} \; . \; . \; . \quad (25)$$

$$n > 1,$$
$$a_{ns} - b_{ns} = \cosh\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-X}\,\cosh\frac{n\pi}{2}\left[\begin{aligned} &\sqrt{n^2-X}\,\tanh\frac{\pi}{2}\sqrt{n^2-X}\left\{(n^2-X+s^2)^{-1} - (n^2-s^2)^{-1}\right\} \\ &+n\,\tanh\frac{n\pi}{2}\left\{(n^2-s^2)^{-1} - (n^2+s^2)^{-1}\right\} \end{aligned}\right]^{6)} \; . \quad (26)$$

[6] When $s = 0$ there values must be multiplied by $\frac{1}{2}$ (see (7) and (8)).

Writing c_{ns} for the terms in the square brackets in (25) and (26) the equation for the single variable X is now

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{10} & c_{30} & c_{50} & \cdots \\ c_{12} & c_{32} & c_{52} & \cdots \\ c_{14} & c_{34} & c_{54} & \cdots \\ - & - & - & \cdots \end{vmatrix} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (27).$$

Search for roots of $\Delta = 0$. A preliminary search made it seems improbable that (27) has any root less than 4. Accordingly the 25 values of c_{ns} were calculated for $n = 1, 3, 5, 7, 9$ and $s = 0, 2, 4, 6, 8$, for each of four values of X namely $X = 4 \cdot 0$, $5 \cdot 0$, $5 \cdot 2$, $5 \cdot 4$. The full determinant up to 5 rows and columns is set out in detail below in table I for the case $X = 5 \cdot 2$ in order that the general character of the determinant may be seen. The values of Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 and Δ_5 were then calculated by taking 1, 2, 3, 4 and 5 rows and columns of Δ. Their values are given in table II. Inspection of the figures in that table shows that a root of $\Delta_1 = 0$ occurs at $X = 5 \cdot 0$ (i. e. where $\tan \sqrt{X-1}\,\pi/2 = 0$) but that the corresponding roots of Δ_2, Δ_3, Δ_4 and Δ_5 all lie between $X = 5 \cdot 2$ and $X = 5 \cdot 4$. Using a quadratic interpolation formula applied to the values of the Δs at $X = 5 \cdot 0$, $5 \cdot 2$ and $5 \cdot 4$ the roots given at the foot of table II are obtained. It will be seen that the convergence is extremely rapid; the root of Δ_1 is $X = 5 \cdot 0$, that of Δ_2 is $X = 5 \cdot 310$, while those of Δ_3, Δ_4 and Δ_5 are $5 \cdot 308$, $5 \cdot 307$, $5 \cdot 304$ respectively. The calculations were made with the help of a slide rule so that the last figure can hardly be relied on, particularly in the case of Δ_5, but it seems certain that the root of Δ_4 only differs from that of Δ_2 by 1 part in 1000. We may therefore take $\boldsymbol{X = 5 \cdot 30}$ as the final result of our calculations. A square plate with clamped edges therefore becomes unstable when subjected to thrusts P per unit length perpendicular to its edges if $\frac{4 P a^2}{D \pi^2} > 5 \cdot 30$.

Table I. Construction of Δ_5 for $X = 5 \cdot 2$.

$n =$	1	2	3	4	5	s
$\Delta_5 =$	·1974	·2964	·0467	·0157	·0074	0
	·2545	·2290	·0407	·0149	·0070	2
	− ·1403	− ·2175	+ ·0640	·0145	·0066	4
	− ·0611	− ·0561	− ·0520	+ ·0298	·0097	6
	− ·0339	− ·0314	− ·0171	− ·0263	+ ·0180	8

Table II.

X	Δ_1	$10\,\Delta_2$	$10^2\,\Delta_3$	$10^4\,\Delta_4$	$10^6\,\Delta_5$
4·0	− 1·032	− 2·85	− 2·00	− 6·8	− 14·4
5·0	0	− 0·822	− 0·733	− 3·4	− 9·4
5·2	+ 0·197	− 0·302	− 0·296	− 1·31	− 3·7
5·4	+ 0·403	+ 0·262	+ 0·286	+ 1·34	+ 3·9
Root $X =$	5·00	5·310	5·308	5·307	5·304

Comparison with approximate methods. By his approximate method Sezawa obtained for this case $\frac{4 P a^2}{D \pi^2} = 5 \cdot 61$. That his result would be a little too high might have been anticipated. The value obtained by the Ritz method assuming the arbitrary displacement $w = \cos^2 x \cos^2 y$ which satisfies the boundary conditions but not the differential equation, is $\frac{4 P a^2}{D \pi^2} = 5 \cdot 33$[7]. That this should be so close to the true value $5 \cdot 30$ is rather surprising. It seems probable that the displacement $w = \cos^2 x \cos^2 y$ happens by accident to be rather near to the true form of the displacement which can exist in neutral equilibrium. M 18

[7] For thus calculation I am indebted to Dr. H. L. Cox.

Über die Biegung von Trägerrosten.

Von *S. Timoshenko* in Ann Arbor, U. S. A.

Für den Fall eines Trägerrostes, bestehend aus mehreren in gleichen Abständen verteilten gleichartigen Balken, welche von einem oder mehreren Querträgern unterstützt werden (Abb. 1 und 2), kann unter Benutzung trigonometrischer Reihen für die elastischen Linien der Querträger eine Näherungslösung erhalten werden. Die auf diese Weise erhaltenen Näherungsformeln für die größten Durchbiegungen der Querträger sind sehr einfach und können vorteilhaft bei praktischen Berechnungen verwendet werden.

§ 1. Der Fall eines Querträgers. Eine Reihe von gleichen parallelen Balken, in Abständen d voneinander, sei durch einen senkrecht zu ersteren liegenden Querträger AB unterstützt (Abb. 1). Alle ersteren, parallelen Balken seien gleichbelastet, und die Belastung für jeden Balken sei Q. Diese Last wird zum Teil getragen von den Stützen der parallelen Balken und zum Teil von dem Querträger. Die Belastung, die auf den Querträger übertragen wird, hängt von seiner Biegungssteifigkeit ab. Ist der Querträger sehr steif, so daß seine Durchbiegungen vernachlässigt werden können, so kann jeder von den parallelen Balken als ein durchlaufender Träger mit drei festen Stützen betrachtet werden. Dann ist der Gesamtdruck auf die mittlere Stütze, d. h. auf den Querträger, leicht zu berechnen. Bezeichnen wir diesen Druck mit αQ, so ist α eine Zahl, die von der Art der Verteilung der Last Q und von der Lage des Querträgers abhängt. So ist z. B. für eine lineare Lastverteilung (eine gleichmäßige, eine Dreieck- oder eine Trapezbelastung) und den Fall, daß der Querträger die parallelen Balken in deren Mitte unterstützt, α gleich 5/8.

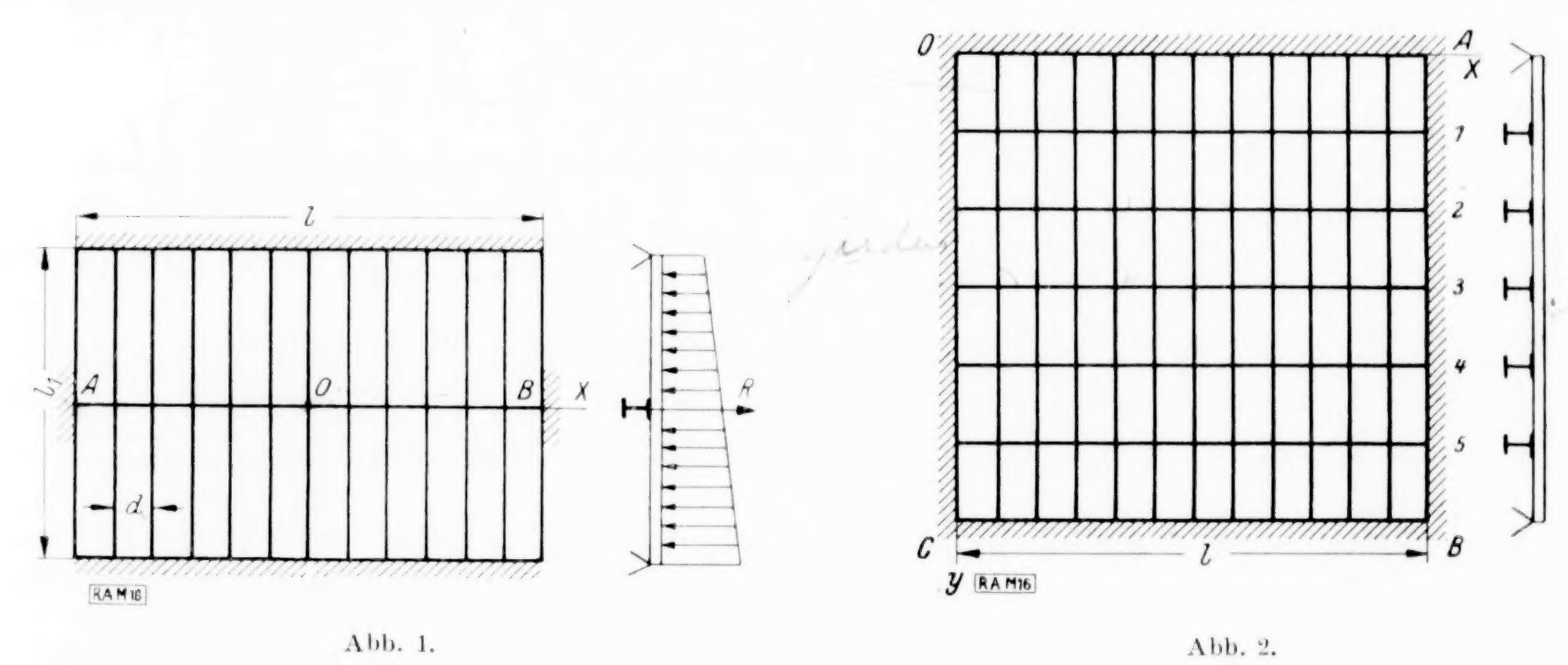


Abb. 1. Abb. 2.

Im allgemeinen wird aber die Belastung, die ein Balken auf den Querträger überträgt, geringer sein als αQ, wegen der Durchbiegung des Querträgers. Diese Belastungsabnahme ist der Durchbiegung y des Querträgers proportional und kann gleich γy gesetzt werden, wo γ ein Koeffizient ist, der von der Biegungssteifigkeit $E_1 I_1$ des parallelen Balkens und von der Lage des Querträgers abhängt. So ist z. B. für den Fall, daß der Querträger die parallelen Balken in deren Mitte unterstützt $\gamma = \frac{48 E_1 I_1}{l_1^3}$.

Bezeichnen wir durch R den Gesamtdruck eines Balkens auf den Querträger, so ist

$$R = \alpha Q - \gamma y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Zur Vereinfachung nachfolgender Rechnungen ersetzen wir die Einzellasten (1) durch eine stetige Belastung, deren Wert an jedem Querschnitt erhalten wird, indem man den Ausdruck (1) durch den konstant gehaltenen Abstand d der parallelen Balken dividiert. Unter y verstehen wir nun die Durchbiegung des Querträgers an dem betrachteten Querschnitt.

Indem wir folgende Bezeichnungen benutzen

$$q = \frac{\alpha Q}{d}; \qquad k = \frac{\gamma}{d} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2),$$

erhalten wir für die stetige Belastung des Querträgers den Ausdruck:

$$q - k y$$

und als Differentialgleichung der elastischen Linie des Querträgers:

$$E\,I\,\frac{d^4 y}{d x^4} = q - k\,y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Diese Gleichung ist identisch mit einer für den Fall eines Stabes auf elastischer Unterlage, deren Modulus gleich k ist.

Betrachten wir einen Querträger, der an seinen Enden einfach gestützt ist! Indem wir den Koordinatenursprung in seiner Mitte annehmen (Abb. 1) und folgende Bezeichnungen einführen:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{k}{4\,E\,I}}; \qquad u = \frac{\beta l}{2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

erhalten wir als Lösung der Gl. (3), die auch die Endbedingungen erfüllt:

$$y = \frac{q\,l^4}{64\,E\,I\,u^4}\left(1 - \frac{2\sin u\,\sinh u}{\cos 2u + \cosh 2u}\sin\beta x \cdot \sinh\beta x - \frac{2\cos u\,\cosh u}{\cos 2u + \cosh 2u}\cos\beta x\,\cosh\beta x\right) \quad (5).$$

Die Durchbiegung in der Mitte wird[1]):

$$\delta = (y)_{x=0} = \frac{q\,l^4}{64\,E\,I\,u^4}\left(1 - \frac{2\cos u\,\cosh u}{\cos 2u + \cosh 2u}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

und das Biegungsmoment daselbst:

$$M = -E\,I\,(y'')_{x=0} = \frac{q\,l^2}{8}\,\frac{2}{u^2}\,\frac{\sinh u\,\sin u}{\cosh 2u + \cos 2u} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7).$$

Unter Benutzung der Tabelle I für die Funktionen

$$\Phi = \frac{2\cos u\,\cosh u}{\cos 2u + \cosh 2u} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{2}{u^2}\,\frac{\sinh u\,\sin u}{\cosh 2u + \cos 2u} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

kann die Berechnung des Querträgers und der Parallelbalken leicht ausgeführt werden.

Tabelle I.

$u =$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1
$\Phi =$	1,000	0,999	0,993	0,979	0,950	0,901	0,827	0,731	0,619	0,498	0,380
$\psi =$	1,000	0,999	0,995	0,983	0,959	0,919	0,859	0,781	0,689	0,591	0,494

$u =$	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,2	2,4
$\Phi =$	0,272	0,178	0,100	0,037	−0,013	−0,052	−0,081	−0,102	−0,117	−0,133	−0,135
$\psi =$	0,405	0,327	0,262	0,208	0,164	0,129	0,101	0,079	0,062	0,037	0,021

Für den Fall eines Querträgers, der eine, im Verhältnis zu den parallelen Längsträgern, große Biegungssteifigkeit besitzt, ist die Größe u (Gl. (4)) klein, und die Werte der Funktionen Φ und ψ sind angenähert gleich Eins. So sind z. B. für $u = 0{,}2$ die Werte $\Phi = 0{,}999$ und $\psi = 0{,}999$. Die Gl. (6) und (7) sagen dann aus, daß die Durchbiegung δ in der Mitte sich der Null nähert und daß das Biegungsmoment daselbst dem Wert $\frac{q\,l^2}{8}$ zustrebt. Die parallelen Balken können in diesem Falle als durchlaufende Träger auf drei festen Stützen betrachtet werden. Mit dem Zuwachs von u nimmt die Funktion Φ ab, und die Durchbiegung δ des mittleren Parallelbalkens wächst. Für $u = \frac{\pi}{2}$ wird $\Phi = 0$ und die Durchbiegung des mittleren Parallelbalkens wird die gleiche wie im Falle eines nur an den Enden gestützten Stabes. Der Druck R wird gleich Null, und der mittlere Parallelbalken wird nicht mehr vom Querbalken getragen. Mit weiterer Zunahme von u wird die Kraft R negativ, der durchbogene Querträger zieht nun am mittleren Parallelbalken, dessen Belastungsbedingungen nun ungünstiger werden, als wenn der Querbalken gänzlich fehlen würde.

[1]) Verschiedene Probleme dieser Art sind behandelt von J. Boobnoff in seiner „Festigkeit des Schiffes“, V. 2, s. 368, 1914, S. Petersburg.

§ 2. Darstellung der Gleichung der elastischen Linie durch eine trigonometrische Reihe. Die Rechnungen des vorigen Paragraphen können vereinfacht werden, indem man für die Gleichung der elastischen Linie des Querträgers ansetzt:

$$y = a_1 \sin\frac{\pi x}{l} + a_2 \sin\frac{2\pi x}{l} + a_3 \sin\frac{3\pi x}{l} + \ldots \quad (9),$$

dabei ist der Koordinatenursprung an einem Ende des Querbalkens angenommen worden. Die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ können leicht berechnet werden, indem man den Ausdruck für die Formänderungsarbeit des Systems benutzt. Die Formänderungsarbeit der Biegung des Querträgers ist

$$V_1 = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 dx = \frac{EI\pi^4}{4l^3}\sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 a_n^2 .$$

Die Formänderungsarbeit der elastischen Unterlage, die die Wirkung der Parallelstäbe auf den Querträger ersetzen würde, wäre entsprechend gleich

$$V_2 = \frac{1}{2}\int_0^l k y^2 dx = \frac{kl}{4}\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 .$$

Betrachten wir die Durchbiegungen, die durch ein Belastungselement $q\,dx$ hervorgerufen werden, das sich im Abstande x von dem Koordinatenursprung befindet, so bestimmen sich die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ aus der Gleichung:

$$\frac{\partial (V_1 + V_2)}{\partial a_n} d a_n = q\, d a_n \sin\frac{n\pi x}{l} dx$$

und daraus unter Benutzung der Bezeichnungen (4):

$$a_n = \frac{2 l^3 q \sin\frac{n\pi x}{l} dx}{EI(\pi^4 n^4 + 64 u^4)}.$$

Integrieren wir diesen Ausdruck nach x in den Grenzen von $x = 0$ bis $x = l$, so erhalten wir die Koeffizienten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ für den Fall einer gleichmäßigen Belastung q, die sich über die ganze Länge des Balkens erstreckt. Die Reihe (9) wird nun gegeben als

$$y = \frac{4 q l^4}{EI\pi^5}\sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n^5 + \frac{64 n u^4}{\pi^4}} \quad (10).$$

In der Praxis ist u gewöhnlich kleiner als Eins, und so können wir mit einer genügenden Genauigkeit die Durchbiegungen y berechnen, indem wir nur das erste Glied der Reihe (10) benutzen. Alsdann erhalten wir für die Durchbiegung der Querträgermitte:

$$\delta = \frac{4 q l^4}{EI\pi^5}\cdot\frac{1}{1 + \frac{64 u^4}{\pi^4}}.$$

Indem wir diesen Wert in die Gl. (1) für y einsetzen, erhalten wir unter Zuhilfenahme der Bezeichnungen (4):

$$R = \alpha Q\left(1 - \frac{4}{\pi}\,\frac{u^4}{u^4 + \frac{\pi^4}{64}}\right) \quad (11).$$

Diese Formel gibt für kleine Werte von u den Auflagerdruck R mit sehr guter Genauigkeit an. Mit der Zunahme von u wächst auch der Fehler dieser Formel und erreicht bei $u = 1$ den Wert von etwa 1 %.

Die hier geschilderte Methode kann auch auf den Fall zweier Querträger angewandt werden. Es seien y_1 und y_2 die Durchbiegungen dieser Träger, und R_1, R_2 die Drucke, die auf sie von einem Parallelbalken übertragen werden. Alsdann erhalten wir die Beziehungen:

$$R_1 = \alpha_1 Q - \gamma_1 y_1 - \gamma_1' y_2 ; \qquad R_2 = \alpha_2 Q - \gamma_2 y_1 - \gamma_2' y_2 ,$$

in welchen die Konstanten $a_1, a_2, \ldots \gamma_2'$ dadurch bestimmt werden können, daß man einen Parallelbalken als einen durchlaufenden Träger auf vier Stützen ansieht, bei dem die Durchbiegungen y_1 und y_2 an den zwei mittleren Stützen gegeben sind. Indem wir, wie vorhin, verfahren und statt der Einzellasten eine stetige Belastung annehmen, erhalten wir für die spezifischen Belastungen, die auf den ersten und zweiten Querträger wirken:

$$\frac{R_1}{d} = q_1 - k_1 y_1 - k_1' y_2; \qquad \frac{R_2}{d} = q_2 - k_2 y_1 - k_2' y_2.$$

In erster Näherung setzen wir an:

$$y_1 = a_1 \sin\frac{\pi x}{l}; \qquad y_2 = a_2 \sin\frac{\pi x}{l},$$

und indem wir bei der Berechnung der Durchbiegung den Ausdruck für die Formänderungsarbeit benutzen, erhalten wir für die Koeffizienten a_1 und a_2 folgende Gleichungen:

$$a_1 = \frac{2\,l^3}{E\,I\,\pi^4}\left(\frac{2\,l}{\pi}q_1 - \frac{a_1 k_1 l}{2} - \frac{a_2 k_1' l}{2}\right); \qquad a_2 = \frac{2\,l^3}{E\,I\,\pi^4}\left(\frac{2\,l}{\pi}q_2 - \frac{a_1 k_2 l}{2} - \frac{a_2 k_2' l}{2}\right),$$

dabei ist die Annahme gemacht worden, daß beide Querträger dieselbe Steifigkeit besitzen. Nachdem man die Koeffizienten a_1 und a_2 erhalten hat, bietet die Berechnung der Auflagerdrucke R_1 und R_2 und der Durchbiegung der Parallelbalken keine weiteren Schwierigkeiten.

§ 3. Der Fall mehrerer Querträger. Für den Fall von mehreren Querträgern (Abb. 2) setzen wir für die Gleichung der elastischen Fläche an:

$$w = \sum_{m=1}^{m=\infty}\sum_{n=1}^{n=\infty} a_{m\,n} \sin\frac{m\,\pi\,x}{l}\sin\frac{n\,\pi\,y}{l_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12),$$

dabei wurde angenommen, daß die Balken an ihren Enden einfach gestützt sind. Um die Durchbiegung des i-ten Parallelbalkens zu berechnen, setzen wir in den Ausdruck (12) x_i statt x ein, und indem wir zur Abkürzung schreiben:

$$A_{n\,i} = a_{1\,n}\sin\frac{\pi x_i}{l} + a_{2\,n}\sin\frac{2\pi x_i}{l} + a_{3\,n}\sin\frac{3\pi x_i}{l} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (a),$$

erhalten wir:

$$(w)_{x=x_i} = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_{n\,i}\sin\frac{n\,\pi\,y}{l_1}.$$

Ganz analog ergibt sich für die Durchbiegung des i-ten Querträgers:

$$(w)_{y=y_i} = \sum_{m=1}^{m=\infty} B_{m\,i}\sin\frac{m\,\pi\,x}{l}, \quad \text{worin} \quad B_{m\,i} = a_{m\,1}\sin\frac{\pi y_i}{l_1} + a_{m\,2}\sin\frac{2\pi y_i}{l_1} + a_{m\,3}\sin\frac{3\pi y_i}{l_1} + \ldots (b)$$

bedeutet. Nachdem die Ausdrücke für die elastischen Linien aller Balken gegeben wurden, kann man zur Ermittlung der Formänderungsarbeit der Biegung übergehen. Im folgenden machen wir die Annahme, daß alle Parallelbalken dieselbe Steifigkeit $E\,I_1$ besitzen und daß die Steifigkeit aller Querträger gleich $E\,I$ ist. Es ergibt sich dann für die Formänderungsarbeit des Systems, das aus p Vertikalbalken und r horizontalen Querträgern besteht:

$$V = \frac{\pi^4 E\,I_1}{4\,l_1^3}\sum_{i=1}^{i=p}\sum_{n=1}^{n=\infty} n^4 A_{n\,i}^2 + \frac{\pi^4 E\,I}{4\,l^3}\sum_{i=1}^{i=r}\sum_{m=1}^{m=\infty} m^4 B_{m\,i}^2 \quad \ldots \ldots (13).$$

Die Berechnung der Koeffizienten $a_{n\,m}$ des Ausdrucks (12) erfolgt nun aus der Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial a_{n\,m}}\,d\,a_{m\,n} = d\,a_{m\,n}\int_{x=0}^{x=l}\int_{y=0}^{y=l_1} q \sin\frac{m\,\pi\,x}{l}\sin\frac{n\,\pi\,y}{l_1}\,d\,x\,d\,y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14),$$

wo q die spezifische Belastung bedeutet, die über das Rechteck $O\,A\,B\,C$ (Abb. 2) stetig verteilt ist.

Im Falle einer gleichmäßigen Belastung ist q eine Konstante, und die Gl. (14) vereinfacht sich zu:

$$\frac{\pi^4 E I_1}{2 l_1^3} \sum_{i=1}^{i=p} n^4 A_{ni} \sin \frac{m \pi x_i}{l} + \frac{\pi^4 E I}{2 l^3} \sum_{i=1}^{i=r} m^4 B_{mi} \sin \frac{n \pi y_i}{l_1} = \frac{4 q l l_1}{\pi^2 m n} \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

In den folgenden Ausführungen nehmen wir an, daß die Parallel- und die Querbalken äquidistant angeordnet sind, daß also

$$\sin \frac{m \pi x_i}{l} = \sin \frac{m \pi i}{p+1}; \qquad \sin \frac{n \pi y_i}{l_1} = \sin \frac{n \pi i}{r+1}$$

gilt. Indem wir das in die Gl. (15) einsetzen und auch die Abkürzungen (a) und (b) benutzen, gelangen wir zu Summenausdrücken von der Form:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m \pi i}{p+1} \sin \frac{n \pi i}{p+1}.$$

Es kann bewiesen werden, daß diese Ausdrücke gleich Null sind, falls $m \neq n$ und außerdem beide von den Zahlen $m+n$ und $m-n$ zugleich Vielfache oder keine Vielfache von $2(p+1)$ sind. Weiter gilt:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m \pi i}{p+1} \sin \frac{n \pi i}{p+1} = -\frac{p+1}{2},$$

falls $m+n$ ein Vielfaches von $2(p+1)$ ist, und

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin \frac{m \pi i}{p+1} \sin \frac{n \pi i}{p+1} = +\frac{p+1}{2},$$

falls $m-n$ ein Vielfaches von $2(p+1)$ ist.

Für den Fall, daß $m=n$, haben wir:

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin^2 \frac{m \pi i}{p+1} = 0, \text{ falls } m \text{ ein Vielfaches von } (p+1) \text{ ist,}$$

und

$$\sum_{i=1}^{i=p} \sin^2 \frac{m \pi i}{p+1} = \frac{p+1}{2}, \text{ falls } m \text{ kein Vielfaches von } (p+1) \text{ ist.}$$

Bei praktischen Berechnungen benutzen wir nur wenige Glieder des allgemeinen Ausdrucks für die Durchbiegung (12), auch sind die Anzahlen p und r der Parallel- und der Querträger verhältnismäßig groß, so daß in den obigen Summenausdrücken $m+n < 2(p+1)$ wird. Alsdann verschwinden alle Glieder mit Ausnahme von je einem in den beiden Summen, die auf der linken Seite der Gl. (15) stehen, so daß man schließlich erhält:

$$n^4 \frac{p+1}{2} \cdot \frac{\pi^4 E I_1}{2 l_1^3} a_{mn} + m^4 \frac{r+1}{2} \cdot \frac{\pi^4 E I}{2 l^3} a_{mn} = \frac{4 q l l_1}{\pi^2 m n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

und daraus

$$a_{mn} = \frac{16 q l_1 l^3}{\pi^6 m n E I} \cdot \frac{1}{m^4 (r+1) + n^4 (p+1) \frac{l^3}{l_1^3} \frac{I_1}{I}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17).$$

Die Durchbiegung jedes einzelnen Balkens kann nun leicht berechnet werden, nachdem man die Koeffizienten der Reihe (12) kennt. So ergibt sich z. B. für den Fall einer ungeraden Anzahl von Querträgern die Durchbiegung des mittleren Trägers nach der Formel (12), indem man für $y = \frac{l_1}{2}$ setzt, als

$$(w)_{y=\frac{l_1}{2}} = \sin \frac{\pi x}{l} \sum_{n=1,3,5,\ldots} a_{1n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \sin \frac{3 \pi x}{l} \sum_{n=1,3,5,\ldots} a_{3n} (-1)^{\frac{n-1}{2}} + \ldots \quad . \quad . \quad (18).$$

Und weiter, unter Zuhilfenahme von Gl. (16):

$$(w)_{y=\frac{l_1}{2}} = \frac{16\, q\, l_1\, l^4}{\pi^6 E I (r+1)} \sum_{m=1,3,5,\ldots} \frac{\sin\frac{m\pi x}{l}}{m\left(m^4 + \frac{p+1}{r+1}\frac{l^3 I_1}{l_1^3 I}\right)}$$

$$- \frac{16\, q\, l_1\, l^4}{3\pi^6 E I (r+1)} \sum_{m=1,3,5,\ldots} \frac{\sin\frac{m\pi x}{l}}{m\left(m^4 + \frac{3^4(p+1)}{r+1}\frac{l^3 I_1}{l_1^3 I}\right)} + \ldots$$

In vielen Fällen gibt das erste Glied dieser Reihe eine gute Näherung, so daß wir annehmen dürfen

$$(w)_{y=\frac{l_1}{2}} = \frac{16\, q\, l_1\, l^4}{\pi^6 E I (r+1)} \cdot \frac{\sin\frac{\pi x}{l}}{1 + \frac{p+1}{r+1}\frac{l^3 I_1}{l_1^3 I}}.$$

Der Vergleich dieses Resultats mit dem für den Fall eines Querträgers (vgl. § 2) zeigt, daß die Durchbiegung des mittleren Querträgers in unserem Falle dieselbe ist, wie für einen Stab auf elastischer Unterlage, der gleichmäßig belastet wird durch q_1, wo

$$q_1 = \frac{4\, q\, l_1}{\pi (r+1)}$$

und der Modulus der Unterlage zu

$$k = \frac{\pi^4 (p+1)}{r+1} \cdot \frac{E I_1}{l\, l_1^3}$$

angenommen wird. Der entsprechende Wert von u, vgl. Bezeichnungen (4), ist

$$u = \frac{l}{2}\sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{\pi^4 (p+1) I_1 l^3}{64 (r+1) I l_1^3}} \quad \ldots \ldots \ldots (19).$$

Falls u den Wert $\frac{\pi}{2}$ erreicht, stützt der Querträger den mittleren Parallelbalken nicht mehr und wird somit überflüssig. Nach der Formel (19) können die Balken in solcher Weise dimensioniert werden, daß die Querträger alle Parallelbalken wirklich stützen. Die Werte von u, berechnet nach Gl. (19), gestatten die Ermittlung der entsprechenden Werte der maximalen Biegungsmomente für die Querträger aus Gl. (7).

Die Parallelbalken können nun als durchlaufende Träger angesehen werden, deren mittlere Stützen bekannte Einsenkungen haben, die den Durchbiegungen der Querträger entsprechen.

Die angegebene Methode kann auch auf den Fall von Querträgern, welche verschiedene Steifigkeiten besitzen, angewandt werden. Als Beispiel nehmen wir den in Abb. 2 dargestellten Trägerrost, der aus elf Parallelbalken und fünf Querbalken besteht. Nehmen wir an, daß die Steifigkeit des mittleren Querbalkens das Doppelte der Steifigkeiten übriger Querbalken beträgt, daß sie also $2EI$ gleich ist. Um dieser Vergrößerung der Steifigkeit des mittleren Querbalkens Rechnung zu tragen, müssen wir zu dem Ausdruck (13) für die Formänderungsarbeit ein Glied von der Form

$$\frac{\pi^4 E I}{4 l^3}\left\{(a_{11} - a_{13} + a_{15} - \ldots)^2 + 3^4 (a_{31} - a_{33} + a_{35} - \ldots)^2 + \ldots\right\}$$

hinzufügen. So erhalten wir an Stelle von Gl. (16):

$$n^4 \frac{p+1}{2}\frac{\pi^4 E I_1}{2 l_1^3} a_{mn} + m^4 \frac{r+1}{2}\frac{\pi^4 E I}{2 l^3} a_{mn} + \frac{\pi^4 E I}{2 l^3} m^4 (a_{m1} - a_{m3} + a_{m5} - \ldots)(-1)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{4\, q\, l\, l_1}{\pi^2 m n} \quad (20).$$

Wir nehmen die neun ersten Glieder der Reihe (12), die uns neun Gleichungen von der Form (20) zur Bestimmung der neun unbekannten Koeffizienten a_{mn} liefern. Dieses Gleichungs-

system kann in drei Gruppen von je drei Gleichungen aufgelöst werden, in der Weise, daß jede Gruppe nur drei Unbekannte enthält. Zur Abkürzung schreiben wir:

$$P = \frac{l^3 I_1}{l_1^3 I}; \qquad N = \frac{q\, l^4 l_1}{12\, \pi^6 E I},$$

dann kann die erste Gruppe ($m = 1$) in der Form:

$$6 P a_{11} + 3 a_{11} + (a_{11} - a_{13} + a_{15}) = 96 N,$$

$$3^4 \cdot 6 P a_{13} + 3 a_{13} - (a_{11} - a_{13} + a_{15}) = 32 N,$$

$$5^4 \cdot 6 P a_{15} + 3 a_{15} + (a_{11} - a_{13} + a_{15}) = \frac{96}{5} N$$

dargestellt werden. Als ein Zahlenbeispiel nehmen wir an $P = 0{,}438$; dann erhalten wir aus den obigen Gleichungen

$$a_{11} = 14{,}49\, N; \quad a_{13} = 0{,}214\, N; \quad a_{15} = 0{,}003\, N,$$

ganz analog ermitteln wir aus den zwei übrigen Gleichungsgruppen:

$$a_{31} = 0{,}107\, N; \quad a_{33} = 0{,}036\, N; \quad a_{35} = 0{,}0004\, N;$$

$$a_{51} = 0{,}0086\, N; \quad a_{53} = 0{,}0044\, N; \quad a_{55} = 0{,}0003\, N.$$

Diese Koeffizienten gestatten nun die Berechnung der Durchbiegungen der Querträger und weiterhin auch der entsprechenden Biegungsmomente durch zweimalige Differentiation der Biegungsgleichungen. Demnach erhalten wir für die Momente in der Mitte der Querträger:

$$(M)_{y = l_1/6} = 0{,}071\, Q l; \quad (M)_{y = l_1/3} = 0{,}122\, Q l; \quad (M)_{y = l_1/2} = 0{,}282\, Q l,$$

wo $Q = \frac{q\, l\, l_1}{12}$ die Belastung pro einen Parallelbalken bedeutet.

Die Parallelbalken können als durchlaufende, auf sieben Stützen gelagerte und gleichmäßig mit Q belastete Träger angesehen werden. Zunächst machen wir die Annahme, daß die Stützen absolut starr sind. Unter Benutzung der Dreimomentengleichungen erhalten wir dann für die Biegungsmomente an den Querträgern:

$$M_{y = l_1/6} = -0{,}00294\, Q l_1; \quad M_{y = l_1/3} = -0{,}00214\, Q l_1; \quad M_{y = l_1/2} = -0{,}00241\, Q l_1 \quad \text{(c)}.$$

Die Biegungsmomente, die zufolge der Einsenkung der mittleren Stützen auftreten, können auch aus den Dreimomentengleichungen ermittelt werden. Es sind z. B. für den mittleren Parallelbalken die Durchbiegungen der Querträger:

$$(w)_{y = l_1/6} = 7{,}38 \frac{Q l^3}{\pi^6 E I}; \quad (w)_{y = l_1/3} = 12{,}46 \frac{Q l^3}{\pi^6 E I}; \quad (w)_{y = l_1/2} = 14{,}21 \frac{Q l^3}{\pi^6 E I} \quad . \; . \; . \quad \text{(d)}$$

und die dadurch an den Querträgern bedingten Biegungsmomente:

$$(M_1)_{y = l_1/6} = 0{,}0425\, Q l_1; \quad (M_1)_{y = l_1/3} = 0{,}0572\, Q l_1; \quad (M_1)_{y = l_1/2} = 0{,}0572\, Q l_1.$$

Indem wir diese Momente denen unter (c) superponieren, erhalten wir für die gesamten Biegungsmomente an den mittleren Stützen des mittleren Parallelbalkens:

$$(M_2)_{y = l_1/6} = 0{,}0396\, Q l_1; \quad (M_2)_{y = l_1/3} = 0{,}0551\, Q l_1; \quad (M_2)_{y = l_1/2} = 0{,}0548\, Q l_1.$$

Diese gestatten nun die Ermittlung der Drucke R, die von den Parallelbalken auf die Querträger ausgeübt werden. Die Drucke R erlauben weiterhin die Bestimmung der Biegungsmomente in den Querträgern mit größerer Genauigkeit, als es nach dem vorhin angewandten Verfahren möglich war.

Die hier für den Fall einer gleichmäßigen Belastung geschilderte Methode kann auch in Fällen einer ungleichmäßigen Belastung (z. B. Belastung im Dreieck oder Trapez) und auch im Falle von Einzellasten angewandt werden. M 16

Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts.

Von *E. Trefftz* in Dresden.

1. Fragestellung[1]). In der vorliegenden Arbeit entwickle ich eine allgemeine Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichtes. Um eine solche Theorie aufzustellen, kann man entweder von der Tatsache ausgehen, daß ein Gleichgewichtszustand an der Grenze der Stabilität ist, wenn es neben dem zu untersuchenden Gleichgewichtszustand noch einen „unendlich benachbarten" Gleichgewichtszustand gibt, oder man kann sich der energetischen Formulierung bedienen, wonach ein Gleichgewichtszustand aufhört, stabil zu sein, wenn die potentielle Energie nicht mehr ein wahres Minimum ist. Ich ziehe die energetische Formulierung vor, weil sie mir einfacher zu sein scheint, und weil sie am einfachsten auf nichtrechtwinklige Koordinaten übertragen werden kann. — Des kürzeren Ausdrucks wegen beschränke ich mich hier auf rechtwinklige Koordinaten und auf äußere Kräfte, die sich mit der Verschiebung nicht ändern; eine Verallgemeinerung bietet aber keine Schwierigkeiten.

2. Bezeichnungen, Koordinaten. Wir bezeichnen als „Ausgangszustand" den auf Stabilität zu untersuchenden Gleichgewichtszustand, als „Nachbarzustand" einen Zustand, der aus dem Ausgangszustand hervorgeht, indem wir den Punkten des elastischen Körpers irgendwelche „zulässigen" Verschiebungen erteilen. „Zulässig" heißen die Verschiebungen, wenn sie mit den geometrischen Bedingungen (Lagerungsbedingungen) verträglich sind. Wir führen die folgenden Koordinaten ein: a) Raumfeste, rechtwinklige Normalkoordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3, bezogen auf die drei rechtwinkligen Einheitsvektoren $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_3$. Der Vektor vom Nullpunkte zum Punkte ξ_1, ξ_2, ξ_3 ist also $\sum_\nu \xi_\nu \mathfrak{E}_\nu$. b) Substanzkoordinaten x_1, x_2, x_3; diese haften an den Massenteilchen des elastischen Körpers. Im Ausgangszustand sollen sie mit den Koordinaten ξ_1, ξ_2, ξ_3 übereinstimmen, im Nachbarzustand sind sie krummlinige Koordinaten. Die Verschiebungen, welche den Ausgangszustand in den Nachbarzustand überführen, seien $\mathfrak{u} = u_1 \mathfrak{E}_1 + u_2 \mathfrak{E}_2 + u_3 \mathfrak{E}_3$, wo die u_ν Funktionen von x_1, x_2, x_3 sind. Es ist also im Ausgangszustand

$$\xi_\nu = x_\nu \text{ und der Radiusvektor vom Nullpunkt } \mathfrak{R} = \sum_\nu x_\nu \mathfrak{E}_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

im Nachbarzustand ist

$$\xi_\nu = x_\nu + u_\nu \text{ und der Radiusvektor vom Nullpunkt } \mathfrak{r} = \sum_\nu (x_\nu + u_\nu) \mathfrak{E}_\nu \quad \ldots \quad (2).$$

An äußeren Kräften betrachten wir a) Volumkräfte mit den Komponenten X_1, X_2, X_3 pro Einheit des Ausgangsvolumens; dieselben sollen im folgenden Sinne konstant sein: auf die Massenteilchen, die im Ausgangszustande in einem Parallelepiped mit den axenparallelen Kanten dx_1, dx_2, dx_3 liegen, soll die Kraft $(X_1 \mathfrak{E}_1 + X_2 \mathfrak{E}_2 + X_3 \mathfrak{E}_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ wirken, auch wenn das Parallelepiped im Nachbarzustand eine Verschiebung und Deformation erfahren hat (Beispiel: Schwerkraft). b) Oberflächenkräfte mit den Komponenten Ξ_1, Ξ_2, Ξ_3 pro Einheit der Oberfläche des Ausgangszustandes; d. h. auf die Oberflächenteile, welche im Ausgangszustande das Element dO erfüllen, soll die Kraft $(\Xi_1 \mathfrak{E}_1 + \Xi_2 \mathfrak{E}_2 + \Xi_3 \mathfrak{E}_3)\, dO$ wirken, auch wenn das Element im Nachbarzustande eine Verschiebung, Drehung oder Deformation erfahren hat (Beispiel: Druck auf die Endfläche eines geknickten Stabes). E sei die gesamte innere Energie des elastisch deformierten Körpers, e dieselbe pro Einheit des Ausgangsvolumens. A sei die Arbeit, welche die äußeren Kräfte beim Übergang vom Ausgangszustande zum Nachbarzustande leisten.

3. Elementarparallelepiped, Gittervektoren, Linienelement. Wir betrachten ein infinitesimales Parallelepiped, das von den Flächenpaaren $x_\nu = \text{const}$ und $x_\nu + dx_\nu = \text{const}$ eingeschlossen wird. Im Ausgangszustande hat dasselbe die drei axenparallelen Kanten dx_1, dx_2, dx_3; in einem Nachbarzustande werden die Kanten desselben von den drei Vektoren $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x_1} dx_1$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x_2} dx_2$, $\frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x_3} dx_3$ gebildet (siehe Abb. 1). Die Vektoren $\mathfrak{e}_h = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x_h}$ nennen wir die „Gittervektoren", sie berechnen sich aus (2) zu

$$\mathfrak{e}_h = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x_h} = \mathfrak{E}_h + \sum_\nu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_h} \mathfrak{E}_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

[1]) Man vergleiche: 1. R. v. Mises, Über die Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie, diese Zeitschr. Bd. 3, 1923, S. 406. 2. H. Reissner, Energiekriterium der Knicksicherheit, diese Zeitschr. Bd. 5, 1925, S. 475. 3. C. B. Biezeno and H. Hencky, On the general theory of elastic stability I and II, Kon. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, Vol. XXXI, 1928, pag. 569. 4. E. Trefftz, Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichtes usw. Verhandlungen des III. intern. Kongresses für Technische Mechanik, Stockholm 1930, Bd. 3, S. 44. Ferner die in den hier genannten Arbeiten zitierte Literatur.

Die Gittervektoren liefern die Koeffizienten des Linienelementes. Zwei Punkte, deren Koordinaten sich um dx_1, dx_2, dx_3 unterscheiden, sind durch den Vektor

$$d\mathfrak{r} = \sum_\nu \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x_\nu} dx_\nu = \sum_\nu \mathfrak{e}_\nu \, dx_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

verbunden. Das Quadrat der Länge desselben ist

$$d\mathfrak{r}^2 = [\sum_\nu \mathfrak{e}_\nu \, dx_\nu]^2 = \sum_\mu \sum_\nu \mathfrak{e}_\mu \cdot \mathfrak{e}_\nu \, dx_\mu \, dx_\nu \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Koeffizientenvergleichung mit der üblichen Form $\sum_\mu \sum_\nu g_{\mu\nu} \, dx_\mu \, dx_\nu$ ergibt

$$g_{\mu\nu} = \mathfrak{e}_\mu \cdot \mathfrak{e}_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Aus Formel (3) erhalten wir hierfür

$$g_{\mu\nu} = \mathfrak{e}_\mu \cdot \mathfrak{e}_\nu = \mathfrak{E}_\mu \cdot \mathfrak{E}_\nu + \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right) + \sum_h \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\nu} \quad \ldots \ldots \quad (7),$$

hier ist berücksichtigt, daß bei rechtwinkligen Einheitsvektoren für $\mu \neq \nu$ $\mathfrak{E}_\mu \cdot \mathfrak{E}_\nu = 0$ ist.

Für den Ausgangszustand ist $u_\nu = 0$ zu setzen. Bezeichnen wir hier die Koeffizienten des Linienelementes durch große $G_{\mu\nu}$, so ist

$$G_{\mu\nu} = \mathfrak{E}_\mu \cdot \mathfrak{E}_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8).$$

Im besonderen werden wir später die Änderungen $\Delta g_{\mu\nu}$ brauchen, welche die $g_{\mu\nu}$ beim Übergang vom Ausgangs- zum Nachbarzustande erfahren,

$$\Delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - G_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_h \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\nu} \quad \ldots \ldots \quad (9).$$

4. Die Spannungen und die innere Energie des elastischen Körpers. Wir betrachten wieder ein Elementarparallelepiped (Abb. 1). Wirkt auf das von den Vektoren $\mathfrak{e}_2 \, dx_2$ und $\mathfrak{e}_3 \, dx_3$ aufgespannte Parallelogramm, welches das Parallelepiped auf der Seite wachsender x_1 begrenzt, die Kraft $\mathfrak{f}_1 \, dx_2 \, dx_3$, so nennen wir $\mathfrak{f}_1$ den zur Fläche $x_1 = \text{const}$ gehörigen „Spannungsvektor". Entsprechend werden die Spannungsvektoren $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{f}_3$ zu den Flächen $x_2 = \text{const}$ und $x_3 = \text{const}$ definiert. Zerlegen wir die Spannungsvektoren nach den Gittervektoren

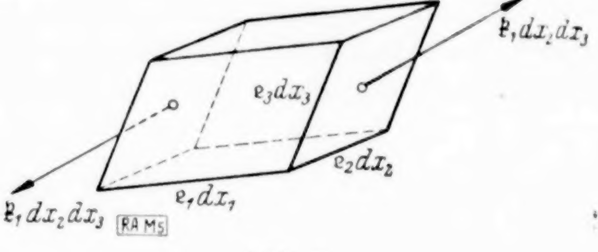


Abb. 1.

$$\mathfrak{f}_h = \sum_\nu k_{h\nu} \, \mathfrak{e}_\nu \quad \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

so erhalten wir die Spannungskomponenten $k_{\mu\nu}$. Durch Betrachtung des Drehungsgleichgewichtes beweist man die Symmetrie

$$k_{\mu\nu} = k_{\nu\mu} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Es sei nun $e \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3$ die in dem Parallelepiped aufgespeicherte elastische Energie. Erteilen wir dann den Punkten des elastischen Körpers die infinitesimalen Verschiebungen $\delta\mathfrak{r}$, so erhöht sich die innere Energie um den Betrag der dabei von den Spannungen geleisteten Arbeit. Ist $\delta\mathfrak{r}$ die Verschiebung im Mittelpunkte des Parallelepipeds, so ist die Verschiebung auf der linken Grenzfläche $\delta\mathfrak{r} - \frac{1}{2}\frac{\partial \delta\mathfrak{r}}{\partial x_1} dx_1$, auf der rechten $\delta\mathfrak{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta\mathfrak{r}}{\partial x_1} dx_1$, und die zugehörigen Spannungsvektoren $-\mathfrak{f}_1 \, dx_2 \, dx_3$ bzw. $+\mathfrak{f}_1 \, dx_2 \, dx_3$ leisten die Arbeit

$$-\mathfrak{f}_1 \, dx_2 \, dx_3 \cdot \left(\delta\mathfrak{r} - \frac{1}{2}\frac{\partial \delta\mathfrak{r}}{\partial x_1} dx_1\right) + \mathfrak{f}_1 \, dx_2 \, dx_3 \cdot \left(\delta\mathfrak{r} + \frac{1}{2}\frac{\partial \delta\mathfrak{r}}{\partial x_1} dx_1\right) = \mathfrak{f}_1 \cdot \frac{\partial \delta\mathfrak{r}}{\partial x_1} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \quad \ldots \quad (12).$$

Mit der gleichen Betrachtung für die Vektoren $\mathfrak{f}_2$ und $\mathfrak{f}_3$ ergibt sich die gesamte Arbeit, d. h. die Erhöhung der inneren Energie zu

$$\delta e \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 = \sum_\nu \mathfrak{f}_\nu \cdot \frac{\partial \delta\mathfrak{r}}{\partial x_\nu} dx_1 \, dx_2 \, dx_3 \quad \ldots \ldots \quad (13).$$

Setzen wir hier $\mathfrak{f}_h = \sum_\nu k_{h\nu} \, \mathfrak{e}_\nu$ ein, und beachten, daß $\mathfrak{e}_h = \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial x_h}$ also $\delta \mathfrak{e}_h = \frac{\partial \delta\mathfrak{r}}{\partial x_h}$ ist, so erhalten wir

$$\delta e = k_{11} \, \mathfrak{e}_1 \cdot \delta\mathfrak{e}_1 + k_{12} (\mathfrak{e}_1 \cdot \delta\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_2 \cdot \delta\mathfrak{e}_1) + \text{usw.} = \sum_\mu \sum_\nu k_{\mu\nu} \, \mathfrak{e}_\mu \cdot \delta\mathfrak{e}_\nu,$$

nun ist aber $g_{\mu\nu} = \mathfrak{e}_\mu \cdot \mathfrak{e}_\nu$, also $\delta g_{\mu\nu} = \mathfrak{e}_\mu \cdot \delta \mathfrak{e}_\nu + \mathfrak{e}_\nu \cdot \delta \mathfrak{e}_\mu$. Damit wird

$$\delta e = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} k_{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Wir wollen jetzt die Änderung der elastischen Energie beim Übergang vom Ausgangszustand zum Nachbarzustand berechnen. Dazu zerlegen wir die Spannungen $k_{\mu\nu}$ in die Spannungen $\sigma_{\mu\nu}$ des Ausgangszustandes und die bei der Deformation entstehenden Zusatzspannungen $\tau_{\mu\nu}$

$$k_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (15).$$

Dann wird die Änderung der inneren Energie der Volumeinheit

$$\Delta e = \int \delta e = \frac{1}{2} \int \sum_{\mu,\nu} \sigma_{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \int \sum_{\mu,\nu} \tau_{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} \quad \ldots \ldots \quad (16).$$

Das erste Integral rechts kann ausgewertet werden, denn die Ausgangsspannungen $\sigma_{\mu\nu}$ sind beim Übergang, d. h. für die Integration konstant. Es ergibt sich (siehe Formel [9])

$$\frac{1}{2} \int \sum_{\mu,\nu} \sigma_{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \sigma_{\mu\nu}\, \Delta g_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu} \sigma_{\mu\nu} \left[\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} + \sum_h \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\nu} \right] \quad \ldots \quad (17).$$

Das zweite Integral $\frac{1}{2} \int \sum_{\mu,\nu} \tau_{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu}$ ist die Arbeit der Zusatzspannungen $\tau_{\mu\nu}$ bei der durch sie hervorgerufenen Deformation. Hierfür machen wir eine Annahme, die allen bisher gerechneten Fällen zugrunde liegt, nämlich, daß wir uns noch im Gültigkeitsbereich des Superpositionsgesetzes befinden, so daß wir den Zusammenhang zwischen den Verschiebungen u_ν und den Spannungen $\tau_{\mu\nu}$ genau so formulieren können wie in der klassischen Elastizitätstheorie. Bezeichnen wir also mit G den Schubmodul, mit m die Querkontraktionszahl des Materials, und setzen zur Abkürzung

$$\varepsilon_\nu = \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu}, \qquad \gamma_{\mu\nu} = \frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \quad \text{ferner } \Theta = \sum_\nu \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\nu} \quad \ldots \ldots \quad (18),$$

so wird die Formänderungsenergie

$$\frac{1}{2} \int \sum_{\mu,\nu} \tau_{\mu\nu}\, \delta g_{\mu\nu} = a = G \left\{ \frac{m-1}{m-2} \Theta^2 - 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1) + \frac{1}{2}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2) \right\} \quad (19)$$

und es gelten die bekannten Spannungs-Dehnungs-Gleichungen:

$$\tau_{11} = \frac{\partial a}{\partial \varepsilon_1} = 2G\left(\varepsilon_1 + \frac{\Theta}{m-2}\right), \qquad \tau_{12} = \frac{\partial a}{\partial \gamma_{12}} = G \gamma_{12} \text{ und cykl.} \quad \ldots \ldots \quad (20).$$

Damit erhalten wir nach Integration über den ganzen Körper als Gesamtänderung der inneren elastischen Energie:

$$\left.\begin{aligned} \Delta E = \iiint \Delta e\, d\omega = \frac{1}{2} \iiint \sum_{\mu,\nu} \sigma_{\mu\nu} \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \right) d\omega \\ + \frac{1}{2} \iiint \sum_{\mu,\nu,h} \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\nu} d\omega + \iiint a\, d\omega \qquad (d\omega = dx_1\, dx_2\, dx_3) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (21).$$

5. Das Energiekriterium für die Stabilitätsgrenze. Ein elastischer Körper befindet sich dann im stabilen Gleichgewicht, wenn bei einer zulässigen Verschiebung in einen Nachbarzustand die Erhöhung ΔE der inneren elastischen Energie größer ist als die dabei von den äußeren Kräften geleistete Arbeit ΔA. Ist die Stabilitätsgrenze erreicht, so gibt es mindestens ein Verschiebungssystem, für welches $\Delta E = \Delta A$ ist, aber keines, für welches $\Delta E < \Delta A$ ist. Sobald $\Delta E < \Delta A$ werden kann, herrscht Instabilität. An der Stabilitätsgrenze ist also

$$\left.\begin{aligned} \Delta E = \frac{1}{2} \iiint \sum_{\mu,\nu} \sigma_{\mu\nu} \left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu} \right) d\omega + \frac{1}{2} \iiint \sum_{\mu,\nu,h} \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\nu} d\omega \\ + \iiint a\, d\omega \geqq \Delta A = \iiint \sum_\nu X_\nu u_\nu\, d\omega + \iint \sum_\nu \Xi_\nu u_\nu\, dO \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (22).$$

Wenn die linke Seite für alle zulässigen Verschiebungen u_ν größer sein muß als die rechte, so müssen sich die bei hinreichend kleinen Verschiebungen überwiegenden linearen Glieder für sich wegheben, d. h. es muß für alle zulässigen u_ν

$$\frac{1}{2}\iiint \sum_{\mu,\nu} \sigma_{\mu\nu}\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x_\nu}+\frac{\partial u_\nu}{\partial x_\mu}\right) d\omega = \iiint \sum_{\nu} X_\nu u_\nu \, d\omega + \iint \sum_{\nu} \Xi_\nu u_\nu \, dO \quad . \; . \; . \; (23)$$

sein. Das liefert nach partieller Integration die bekannten Gleichgewichtsbedingungen des Ausgangszustandes

im Innern $$\sum_{\nu} \frac{\partial \sigma_{h\nu}}{\partial x_\nu} + X_h = 0 \quad . \; . \; . \; (24),$$

$$h = 1, 2, 3$$

an der Oberfläche $$\sum_{\nu} \sigma_{h\nu} \cos(\nu, N) = \Xi_h \quad . \; . \; . \; (25).$$

Dabei ist $\cos(\nu, N)$ der Richtungscosinus der äußeren Normalen des elastischen Körpers gegen die ν-te Axe.

Nach Wegheben der linearen Glieder bleiben in (22) die quadratischen Glieder, die wir mit Q bezeichnen wollen,

$$Q = \frac{1}{2}\iiint \sum_{\mu,\nu,h} \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu}\frac{\partial u_h}{\partial x_\nu} \, d\omega + \iiint a \, d\omega \geqq 0 \quad . \; . \; . \; (26).$$

An der Stabilitätsgrenze gibt es nun mindestens ein „gefährliches" Verschiebungssystem u_1, u_2, u_3, für welches in (26) das Gleichheitszeichen gilt. Da Q nicht negativ werden darf, ist der von dem „gefährlichen" System erreichte Wert 0 also ein Minimum. Aus dieser Minimaleigenschaft folgt, daß für alle zulässigen Änderungen δu_ν

$$\delta Q = 0 \quad . \; . \; . \; (27)$$

sein muß. Aus dieser Variationsforderung erhalten wir die Differentialgleichungen und Randbedingungen für die „gefährlichen" Verschiebungen. Bilden wir δQ, so liefert das erste Integral

$$\delta \frac{1}{2}\iiint \sum_{\mu,\nu,h} \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu}\frac{\partial u_h}{\partial x_\nu} \, d\omega = \iiint \sum_{\mu,\nu,h} \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu}\frac{\partial \delta u_h}{\partial x_\nu} \, d\omega .$$

(Eigentlich treten zwei Summanden auf; diese unterscheiden sich nur durch die Bezeichnung der Summationszeichen, sind also gleich.) Eine partielle Integration ergibt

$$-\iiint \sum_{\mu,\nu,h} \delta u_h \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial u_h}{\partial x_\mu}\right) d\omega + \iint \sum_{\mu,\nu,h} \delta u_h \, \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu} \cos(\nu, N) \, dO ,$$

wo das erste Integral über das Innere, das zweite über die Oberfläche des elastischen Körpers zu nehmen ist, bzw. wenn wir in dem letzten Integral nach Gl. (25) $\sum_\nu \sigma_{\mu\nu} \cos(\nu, N) = \Xi_\mu$ setzen

$$-\iiint \sum_{\mu,\nu,h} \delta u_h \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial u_h}{\partial x_\mu}\right) d\omega + \iint \sum_{\mu,h} \delta u_h \, \Xi_\mu \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu} \, dO .$$

Die Variation des zweiten Integrals ist aus der klassischen Elastizitätstheorie bekannt:

$$\delta \iiint a(\varepsilon, \gamma) \, d\omega = -\iiint \sum_h \delta u_h \sum_\nu \frac{\partial \tau_{h\nu}}{\partial x_\nu} \, d\omega + \iint \sum_h \delta u_h \sum_\mu \tau_{h\mu} \cos(\mu N) \, dO .$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\left.\begin{aligned} \delta Q = &-\iiint \sum_h \delta u_h \left\{\sum_\nu \frac{\partial \tau_{h\nu}}{\partial x_\nu} + \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial u_h}{\partial x_\mu}\right)\right\} d\omega \\ &+ \iint \sum_h \delta u_h \left\{\sum_\mu \tau_{h\mu} \cos(\mu, N) + \sum_\mu \Xi_\mu \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu}\right\} dO \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (28).$$

Soll dies für alle zulässigen δu_h verschwinden, so müssen die Raum- und die Oberflächen-Integrale für sich verschwinden, und das ist nur möglich, wenn im Innern des Körpers die Differentialgleichungen

$$\sum_\nu \frac{\partial \tau_{h\nu}}{\partial x_\nu} + \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left(\sigma_{\mu\nu}\frac{\partial u_h}{\partial x_\mu}\right) = 0 \quad . \; . \; . \; (29)$$

und an der Oberfläche die Randbedingungen

$$\sum_{\nu} \tau_{h\nu} \cos(\nu, N) + \sum_{\nu} \Xi_\nu \frac{\partial u_h}{\partial x_\nu} = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30)$$

erfüllt sind. Mechanisch bedeuten diese Gleichungen, daß neben dem Ausgangszustand noch ein unendlich benachbarter Gleichgewichtszustand existiert. Mathematisch handelt es sich um ein Eigenwertsproblem: Die Gleichungen (29) und (30) mit den Spannungs-Dehnungs-Gleichungen (20) sind homogen; bleibt die Belastung unterhalb der Stabilitätsgrenze, so haben sie keine von Null verschiedene Lösung, eine solche tritt erst auf, sobald die Stabilitätsgrenze erreicht ist.

Um zu zeigen, daß die Lösbarkeit der Gleichungen (29) mit den Randbedingungen (30) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend für das Erreichen der Stabilitätsgrenze ist, muß noch gezeigt werden, daß für die Lösungen u_ν auch wirklich $Q(u_\nu) = 0$ wird. Bisher ist nur gezeigt, daß für alle zulässigen δu_ν $\delta Q = 0$ wird. Machen wir aber speziell $\delta u_\nu = \frac{1}{2} u_\nu$, so wird $\delta Q = Q(u_\nu)$. Da δQ verschwindet, so folgt $Q(u_\nu) = 0$ w. z. b. w.

6. Anwendung. Wenn man die hier entwickelte, allgemeine dreidimensionale Stabilitätstheorie des elastischen Gleichgewichts benutzen will, um zu den üblichen technischen Näherungsmethoden zu gelangen, so geht man am besten von dem Variationsproblem aus, das in den Gleichungen (26) und (27) formuliert ist. Man muß nur den Ausdruck für die elastische Energie der Zusatzdeformation $\iiint a(\varepsilon, \gamma)\, d\omega$ durch die Näherungsausdrücke der elementaren Methoden ersetzen. Um das an einem Beispiel zu zeigen, will ich die Gleichungen für das Kippen eines rechteckigen Trägers ableiten (Abb. 2).

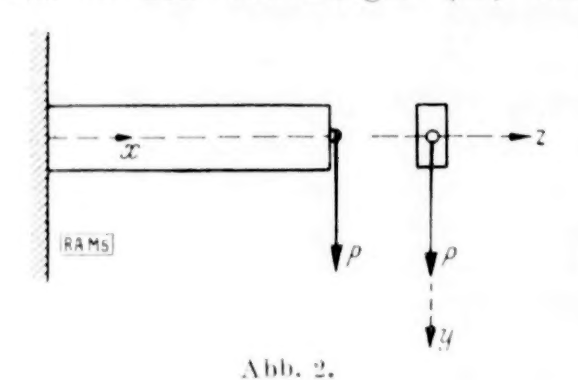


Abb. 2.

Ein Balken von schmalem, rechteckigem Querschnitt sei am einen Ende ($x = 0$) eingespannt, am anderen Ende ($x = l$) von einer Einzelkraft P in Richtung der längeren Rechteckseite (y-Richtung) belastet. Bezeichnungen wie üblich: x-Axe in der Balkenmittellinie, J_y und J_z Trägheitsmomente des Querschnitts, EJ Biegungssteifigkeit, $G\Theta$ Torsionssteifigkeit. Nach der elementaren Theorie ruft die Kraft P die Spannungen σ_{xx} und σ_{xy} hervor, wobei

$$\sigma_{xx} = -\frac{P(l-x)\,y}{J_z} \qquad \iint \sigma_{xy}\, dy\, dz = P \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

ist. (N. B. Doppelintegrale sind über den Querschnitt zu nehmen.)

Bei hinreichend großer Last P knickt der Stab seitlich, d. h. in der z-Richtung, aus und erfährt gleichzeitig eine Torsion. Für diese Verschiebung aus der Gleichgewichtslage machen wir den vereinfachten Ansatz

$$v = -\vartheta(x)\, z \qquad w = W(x) + \vartheta(x)\, y \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32).$$

Nun müssen wir die beiden Integrale für Q in Gleichung (26) ausrechnen. Die Formänderungsenergie des gebogenen und tordierten Stabes wird nach der elementaren Theorie

$$\iiint a\, d\omega = \frac{1}{2} \int_0^l E J_y\, W''(x)^2\, dx + \frac{1}{2} \int_0^l G\,\Theta\, \vartheta'(x)^2\, dx \quad \ldots \ldots \quad (33).$$

Das die Arbeit der Ausgangsspannungen darstellende Integral wird mit der veränderten Bezeichnung bei Benutzung der Spannungsformeln (31) und des Verschiebungsansatzes (32)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2} \iiint \sum_{\mu, \nu, h} \sigma_{\mu\nu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\mu} \frac{\partial u_h}{\partial x_\nu}\, d\omega = \\ &-\frac{1}{2} \iiint \frac{P(l-x)\,y}{J_z} \{[W'(x) + \vartheta'(x)\, y]^2 + [\vartheta'(x)\, z]^2\}\, dx\, dy\, dz \\ &+\frac{1}{2} \iiint 2\, \sigma_{xy} [W'(x) + \vartheta'(x)\, y]\, \vartheta(x)\, dx\, dy\, dz \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (34).$$

Integriert man nach y und z, wobei wegen der doppelten Symmetrie des Querschnitts die Integrale $\iint y\, dy\, dz$, $\iint y^3\, dy\, dz$, $\iint y z^2\, dy\, dz$ und $\iint \sigma_{xy}\, y\, dy\, dz$ fortfallen, so erhält man

$$-\int_0^l P(l-x)\, W'(x)\, \vartheta'(x)\, dx + \int_0^l P\, W'(x)\, \vartheta(x)\, dx = -\int_0^l P\, W'(x) \frac{d}{dx}[(l-x)\, \vartheta(x)]\, dx \quad . \ (35).$$

Damit wird

$$Q = -\int_0^l P\, W'(x) \frac{d}{d\,x}[(l-x)\,\vartheta(x)]\, d\,x + \frac{1}{2}\int_0^l E\, J_y\, W''(x)^2\, d\,x + \frac{1}{2}\int_0^l G\,\Theta\,\vartheta'(x)^2\, d\,x \quad . \; . \; . \; (36).$$

Wir bilden nun

$$\left.\begin{aligned} \delta\, Q = & -\int_0^l P\,\delta\, W'(x) \frac{d}{d\,x}[(l-x)\,\vartheta(x)]\, d\,x - \int_0^l P\, W'(x) \frac{d}{d\,x}[(l-x)\,\delta\,\vartheta(x)]\, d\,x \\ & + \int_0^l E\, J_y W''(x)\,\delta\, W''(x)\, d\,x + \int_0^l G\,\Theta\,\vartheta'(x)\,\delta\,\vartheta'(x)\, d\,x \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (37).$$

Bei der partiellen Integration, durch die wir die Ableitungen $\delta\, W'$ und $\delta\,\vartheta'$ in den Integralen beseitigen, müssen wir beachten, daß wegen der Einspannungsbedingungen

$$W(0) = 0,\; W'(0) = 0,\; \vartheta(0) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (38),$$

für $x = 0$ auch

$$\delta\, W(0) = 0,\; \delta\, W'(0) = 0,\; \delta\,\vartheta(0) = 0$$

sein muß. Damit wird

$$\left.\begin{aligned} \delta\, Q = & \; E\, J_y\, W''(l)\,\delta\, W'(l) - \delta\, W(l)\,[E\, J_y\, W'''(l) - P\,\vartheta(l)] + G\,\Theta\,\vartheta'(l)\,\delta\,\vartheta(l) \\ & + \int_0^l \delta\, W(x) \left\{E\, J_y\, W^{\mathrm{IV}}(x) + P \frac{d^2}{d\,x^2}[(l-x)\,\vartheta(x)]\right\} d\,x \\ & - \int_0^l \delta\,\vartheta(x)\,\{G\,\Theta\,\vartheta''(x) - P\, W''(x)\,(l-x)\}\, d\,x \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; (39).$$

Das kann nur dann für alle zulässigen Variationen $\delta\, W$ und $\delta\,\vartheta$ verschwinden, wenn die Faktoren von $\delta\, W(l)$, $\delta\, W'(l)$ und $\delta\,\vartheta(l)$ und die Klammerausdrücke in den Integralen für sich verschwinden. Damit erhalten wir die Differentialgleichungen

$$E\, J \frac{d^4\, W}{d\, x^4} + \frac{d^2}{d\,x^2}[P\,(l-x)\,\vartheta] = 0\,, \qquad G\,\Theta \frac{d^2\,\vartheta}{d\,x^2} - P\,(l-x) \frac{d^2\, W}{d\,x^2} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; (40)$$

und die Randbedingungen

$$W''(l) = 0, \quad E J_y\, W'''(l) = P\,\vartheta(l), \quad \vartheta'(l) = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (41),$$

zu denen noch die gegebenen Randbedingungen (38) hinzukommen

$$W(0) = 0 \qquad W'(0) = 0 \qquad \vartheta(0) = 0\,.$$

Diese Differentialgleichungen und Randbedingungen sind mit den von Prandtl angegebenen Gleichungen identisch.

In der gleichen Weise kann man die Differentialgleichungen und Randbedingungen für alle bekannten Probleme des Knickens und Kippens von Platten und Stäben aus dem allgemeinen Ansatz gewinnen.

7. Schlußbemerkung. Zum Schluß möchte ich auf den Zusammenhang meiner Ausführungen mit der Theorie von Biezeno und Hencky und mit meinen eigenen früheren Untersuchungen eingehen. Biezeno und Hencky (On the general theory of elastic stability, l. c., Fußnote S. 160) gründen ihre Theorie auf die Betrachtung des unendlich benachbarten Gleichgewichtszustandes. Der wesentliche Unterschied gegenüber meiner Methode besteht in der Art, wie der „benachbarte" Spannungszustand beschrieben wird. B. und H. beziehen sich stets auf ein raumfestes Koordinatensystem, während ich das mit den Massenteilchen mitbewegte System der Substanzkoordinaten benutze. Ich glaube, durch Benutzung dieses natürlichen Koordinatensystems eine Vereinfachung der Darstellung erreicht zu haben; die Ergebnisse sind natürlich in beiden Fällen die gleichen, doch geht die Arbeit von B. und H. weiter als die meine.

Meine eigenen früheren Untersuchungen (Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts usw., l. c., Fußnote S. 160) sind insofern allgemeiner als die hier entwickelte Theorie, weil sie die Voraussetzung nicht enthalten, daß die Spannungs-Dehnungs-Gleichungen für die Zusatz-Spannungen und Verschiebungen die einfache Form der klassischen Elastizitätstheorie haben. Dem Vorteil der größeren Allgemeinheit meiner früheren Untersuchungen steht die größere praktische Brauchbarkeit der hier entwickelten Theorie gegenüber.

M 5

Über das Fehlerglied bei numerischer Integration.

Von *W. Wirtinger* in Wien.

Einleitung. Bei den gewöhnlichen Methoden der numerischen Integration wird das etwa zwischen den Grenzen Null und Eins genommene Integral durch eine homogene lineare Funktion der Zwischenwerte ersetzt und diese sowie die Zwischenwerte so bestimmt, daß die Formel für Polynome bis zu einem bestimmten, etwa dem $m-1$. Grad richtig bleibt. Für den Rest wird gewöhnlich eine Formel gegeben, welche einen Mittelwert der m-ten Derivierten mit einem von dem Verfahren abhängigen Faktor ergibt. Es ist wünschenswert, eine exakte Formel für den Rest zu haben, der ähnlich wie bei der Taylorschen Reihe durch ein bestimmtes Integral dargestellt wird. Eine solche soll im folgenden entwickelt werden, und es sei gleich bemerkt, daß das angewandte Verfahren ohne weiteres auch auf den Fall ausgedehnt werden kann, wenn außer den Funktionswerten an den Zwischenstellen noch die Werte von einer oder mehreren Derivierten verwendet werden. Die so erhaltene Formel kann dann, wenn wünschenswert, noch beliebig durch teilweise Integration weiter entwickelt werden, ohne daß die Übersichtlichkeit des Ergebnisses darunter leidet, und zwar in derselben Weise, wie ich dies bei der Eulerschen Summenformel durchgeführt habe[1]). Das Hilfsmittel dazu wird hier ebenfalls durch die dort benutzten Funktionen

$$P_{2\varkappa}(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos 2 n \pi x}{2^{2\varkappa-1} n^{2\varkappa} \pi^{2\varkappa}}, \qquad P_{2\varkappa+1}(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin 2 n \pi x}{2^{2\varkappa} n^{2\varkappa+1} \pi^{2\varkappa+1}} \quad \ldots \quad (1)$$

gegeben. Diese genügen den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} & P_\varkappa(x) = (-1)^\varkappa \frac{d P_{\varkappa+1}(x)}{dx}, && P_\varkappa(x+1) = P_\varkappa(x), \\ & \int_0^1 P_{\varkappa+1}(x)\,dx = 0, && P_1(x) = \frac{1}{2} - x + [x] \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (2),$$

wo $[x]$ die ganze Zahl bedeutet, welche durch die Bedingungen $x-1 < [x] \leq x$ festgelegt ist. An dieser Ungleichung ist auch für negative Werte von x festzuhalten. Die Funktionen $P_\varkappa(x)$ selbst sind ganze rationale Funktionen $\varkappa$-ten Grades von $x-[x]$ mit rationalen Zahlenkoeffizienten, wie sich aus (2) unmittelbar ergibt und gerade oder ungerade, je nachdem ihr Grad gerade oder ungerade ist. Für den späteren Gebrauch seien die ersten sechs hier angeführt für $0 \leq x \leq 1$:

$$\left.\begin{aligned} & P_1(x) = \frac{1}{2} - x, \quad P_2(x) = \frac{1}{12} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2, \quad P_3(x) = \frac{1}{12}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3, \\ & P_4(x) = \frac{1}{720} - \frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{24}x^4, \quad P_5(x) = \frac{1}{720}x - \frac{1}{72}x^3 + \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{120}x^5, \\ & P_6(x) = \frac{1}{30240} - \frac{1}{1440}x^2 + \frac{1}{288}x^4 - \frac{1}{240}x^5 + \frac{1}{720}x^6 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (3).$$

Allgemein werden die $P_\varkappa(x)$ durch die mit geeigneten Vorzeichen versehenen Bernoullischen Polynome gegeben[2]).

I.

Es sei nun eine Formel für mechanische Quadratur, welche für Polynome einschließlich des $(m-1)$ Grades exakt ist, gegeben, die wir der Einfachheit halber für das Intervall von 0 bis 1 anwenden

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_1^l A_\nu f(\xi_\nu) + R_m \quad \ldots \quad (4),$$

wobei es gleichgültig ist, ob, wie etwa bei der Gaußschen Methode, volle Ausnützung der in den Koeffizienten A_ν und den Werten ξ_ν verfügbaren Größen stattfindet, oder ob, wie bei der Weddleschen Formel, im Interesse einfacherer Werte der A_ν auf diese Ausnützung verzichtet wird. Stellt man hier $f(x)$ und das unbestimmte Integral $\int_0^x f(x)\,dx$ durch die Taylorsche Formel dar

[1]) Acta mathem. Bd. 26 (1902).
[2]) S. z. B. Knopp, Unendliche Reihen. 3. Aufl. S. 541 f.

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\ldots+\frac{x^{m-1}f^{(m-1)}(0)}{(m-1)!}+\frac{1}{(m-1)!}\int_0^x f^{(m)}(z)(x-z)^{m-1}\,dz \quad \ldots \quad (5),$$

$$\int_0^x f(x)\,dx=f(0)\,x+\frac{x^2}{2}f'(0)+\ldots+\frac{x^m f^{(m-1)}(0)}{m!}+\frac{1}{m!}\int_0^x f^{(m)}(z)(x-z)^m\,dz \quad \ldots \quad (6),$$

so erkennt man sofort, daß sich wegen der vorausgesetzten Beschaffenheit der A_ν, ξ_ν die Glieder mit den Derivierten bis zur $m-1$. Ordnung wegheben müssen und man erhält für R_m die Darstellung

$$R_m=\frac{1}{m!}\int_0^1 f^{(m)}(z)(1-z)^m\,dz-\frac{1}{(m-1)!}\sum_1^l A_\nu\int_0^{\xi_\nu} f^{(m)}(z)(\xi_\nu-z)^{m-1}\,dz \quad \ldots \quad (7),$$

welche man in die Form setzen kann

$$R^m=\int_0^1 f^{(m)}(z)\,\varphi_m(z)\,dz \quad \ldots \quad (8),$$

wo $\varphi_m(z)$ eine von Intervall zu Intervall wechselnde ganze rationale Funktion vom m-ten Grade ist, die zwar aus (7) leicht bestimmt werden kann, aber für die weitere Behandlung unbequem ist. Bemerkt man aber, daß nunmehr

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_1^l A_\nu f(\xi_\nu)+\int_0^1 f^{(m)}(z)\,\varphi_m(z)\,dz \quad \ldots \quad (9)$$

eine für alle Funktionen, welche durch die Taylorsche Formel dargestellt werden, richtige Gleichung ist, so erkennt man, daß man $\varphi_m(z)$ in eine Fouriersche Reihe entwickeln kann, deren Koeffizienten aus (9) leicht bestimmt werden können. Setzt man nämlich für $f(x)$ zunächst x^m, so erhält man

$$\int_0^1 \varphi_m(z)\,dz=\frac{1}{m!}\left(\frac{1}{m+1}-\sum_1^l A_\nu\,\xi_\nu^{\,m}\right)=c_m.$$

Für das Weitere ist es zweckmäßig, die Fälle von geradem und ungeradem m zu trennen. Es sei zuerst $m=2q$ und setzt man einmal $f(x)=\cos 2n x\pi$, das zweitemal $\sin 2n x\pi$, so findet man

$$2\int_0^1 \varphi_{2q}(z)\,{\cos \atop \sin}\,2n\pi z\,dz=(-1)^{q-1}\frac{2}{(2n\pi)^{2q}}\sum_{\nu=1}^l A_\nu\,{\cos \atop \sin}\,2n\pi\xi_\nu,$$

während sich für ungerades $m=2q+1$ ergibt

$$2\int_0^1 \varphi_{2q+1}(z)\,{\cos \atop \sin}\,2n\pi z\,dz=(-1)^{q-1}\frac{2}{(2n\pi)^{2q+1}}\sum_{\nu=1}^l A_\nu\,{\sin \atop \cos}\,(-2n\pi\xi_\nu).$$

Die Fouriersche Entwicklung von $\varphi_m(z)$ zeigt dann in jedem Fall das Bestehen der Formel

$$\boxed{\varphi_m(z)=c_m-(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]}\sum_{\nu=1}^l A_\nu\,P_m(\xi_\nu-z)} \quad \ldots \quad (10),$$

welches die versprochene Darstellung der Fehlerfunktion ist.

II.

Ich unterlasse es, die Vereinfachungen, welche sich aus symmetrischer Verteilung der ξ-Werte gegen die Mitte ergeben, ausdrücklich anzuführen. Ebenso ist ohne weiteres klar, daß bei Gebrauch der Formel (10) jede solche Quadraturformel durch teilweise Integration in derselben Weise weiter entwickelt werden kann wie die Eulersche Formel, und daß dabei nur Größen von der Gestalt $\sum_{\nu=1}^l A_\nu P_{m+\varkappa}(\xi_\nu)$ als Koeffizienten der Deriviertendifferenz $f^{(m+\varkappa)}(1)-f^{(m+\varkappa)}(0)$ auftreten. Ferner ist deutlich, daß jede solche Formel (10) umgekehrt

durch teilweise Integration in derselben Weise die Ausgangsformel liefert wie bei der Taylorschen Reihe, wobei beim letzten Schritt die bei $P_1(x)$ auftretende Unstetigkeit zu beachten ist.

Für die Eulersche Formel liefert der Ansatz

$$\int_0^1 f(z)\,dz = \frac{f(0)+f(1)}{2} + \int_0^1 f'(z)\,\varphi(z)\,dz$$

unmittelbar die trigonometrische Entwicklung von $\varphi(z) = P_1(z)$.

Für die Simpsonsche Formel liefert der Ansatz

$$\int_0^1 f(z)\,dz = \frac{f(0)+4f\left(\frac{1}{2}\right)+f(1)}{6} + \int_0^1 f^{(\mathrm{IV})}(z)\,\varphi_4(z)\,dz$$

$$\varphi_4(z) = -\frac{1}{2880} - \frac{1}{3} P_4(z) - \frac{2}{3} P_4\left(\frac{1}{2} - z\right) \quad \dots \dots \dots \dots \quad (11),$$

was für den Rest der Simpsonschen Formel ergibt

$$R_m = -\frac{1}{2880}[f'''(1) - f'''(0)] - \frac{1}{3}\int_0^1 f^{(\mathrm{IV})}(z)\left[P_4(z) + 2P_4\left(\frac{1}{2} - z\right)\right]dz \quad . \quad . \quad (12).$$

Der erste Teil ist hier das sogenannte Chevillietsche Restglied[3]), und die Formel zeigt, daß mit dessen Hinzufügung die Formel für Polynome bis zur 5. Ordnung einschließlich genau wird.

Allgemein tritt eine Verbesserung durch Hinzunahme des Gliedes $c_m(f^{(m-1)}(1) - f^{(m-1)}(0))$ ein, weil ja das Integral über $\varphi_m(z) - c_m$ von 0 bis 1 genommen immer 0 ist. Für die auf drei Glieder beschränkte Gaußsche Formel hat man den Ansatz

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{5}{18} f(\xi_1) + \frac{4}{9} f(\xi_2) + \frac{5}{18} f(\xi_3) + \int_0^1 f^{(6)}(z)\,\varphi_6(z)\,dz$$

mit

$$\xi_1 = \frac{1-\sqrt{0{,}6}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{1}{2}, \quad \xi_3 = \frac{1+\sqrt{0{,}6}}{2}.$$

Man findet

$$\varphi_6(z) = \frac{1}{2016000} + \frac{5}{9} P_6(\xi_1 - z) + \frac{4}{9} P_6\left(\frac{1}{2} - z\right),$$

so daß unter Hinzufügung der Korrektur $\frac{1}{2016000}(f^{(\mathrm{V})}(1) - f^{(\mathrm{V})}(0))$ die Formel bis zu Gliedern 7. Ordnung richtig wird und weitere Glieder durch teilweise Integration gefunden werden können.

M 3

Über die Bruchlinien zentrierter Ovale.

Wie zerbricht ein Stück Zucker?

Von *E. Zermelo* in Freiburg.

In den „Vermischten Schriften des Dr. Mises" aus dem Jahre 1875 hat G. Th. Fechner in einem humoristischen Aufsatze die Frage behandelt: warum man die Wurst schief anschneidet? Die Namensgleichheit mit dem Pseudonym jenes geistvollen Physikers und das Ausgehen von einer Frage des praktischen Lebens mögen es rechtfertigen, wenn ich in dieser Zeitschrift zu Ehren ihres Herausgebers, R. v. Mises, eine mathematische Verallgemeinerung der Frage nach der Bruchlinie eines Zuckerstücks behandle.

1. Wenn man ein prismatisches, quadratisches oder rechteckiges Zuckerstück mit der bloßen Hand zu halbieren versucht, so hält man es zweckmäßig an zwei diagonal entgegengesetzten Eckpunkten zwischen Daumen und Zeigefinger je einer Hand fest und probiert mit wechselndem und beständig verstärktem Druck zwischen beiden Händen, bis es endlich in der Mitte auseinanderbricht. Dabei zeigt sich, daß die geradlinige Bruchlinie zwar regelmäßig durch den Mittelpunkt O des Rechteckes, aber niemals längs der Diagonale, auch niemals parallel einer Rechteckseite verläuft, sondern in der Regel längs eines Durchmessers CD, der die größere Rechteckseite in einem Punkte C schneidet, wo $AC = AO$, also AOC ebenso wie BOD ein

[3]) Comptes Rendus 78 (1874), pg. 1841, oder Scarborough, Num. Math. Analysis (1931), pg. 161.

gleichschenkliges Dreieck ist. Die Erklärung dieser zunächst auffallenden Tatsache beruht auf dem Umstande, daß bei dem eingeschlagenen Verfahren der zu überwindende Widerstand der Bruchlänge $CD = 2l$, das wirksame Drehmoment aber der Länge des Lotes $AE = h$ proportional ist, und daß der Bruch bei dem kleinstmöglichen in A und B ausgeübten Kräftepaar p erfolgt. Es muß also, wenn k eine Konstante bedeutet, für ein minimales p

$$p h = 2 k l$$

sein oder m. a. W., es muß der Quotient

$$\frac{l}{h} = \frac{OC}{AE}$$

durch Wahl von C möglichst klein gemacht werden. Es handelt sich demnach um die Bestimmung eines Dreieckes AOC, in welchem eine Seite $AO = d$ und ein anliegender Winkel $OAC = \alpha$ gegeben ist und in welchem das Verhältnis der gegenüberliegenden Seite OC zur Höhe AE möglichst klein sein soll (Abb. 2). Diese elementare Minimumsaufgabe führt, auf die gewöhnliche Weise behandelt, zu dem Ergebnis, daß die Winkel β und γ bei O und C einander gleich, das Dreick also gleichschenklig sein muß. Es ist nämlich

$$OC = l = d\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad AE = h = d\sin\beta, \quad \text{also}$$

$$\frac{h}{l} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)}{2\sin\alpha} = \frac{\cos(\beta-\gamma)}{2\sin\alpha} + \frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

$$\leq \frac{1+\cos\alpha}{2\sin\alpha} = \frac{1}{2}\cot\frac{\alpha}{2},$$

wo das $=$-Zeichen nur im Falle $\beta = \gamma$ gültig ist.

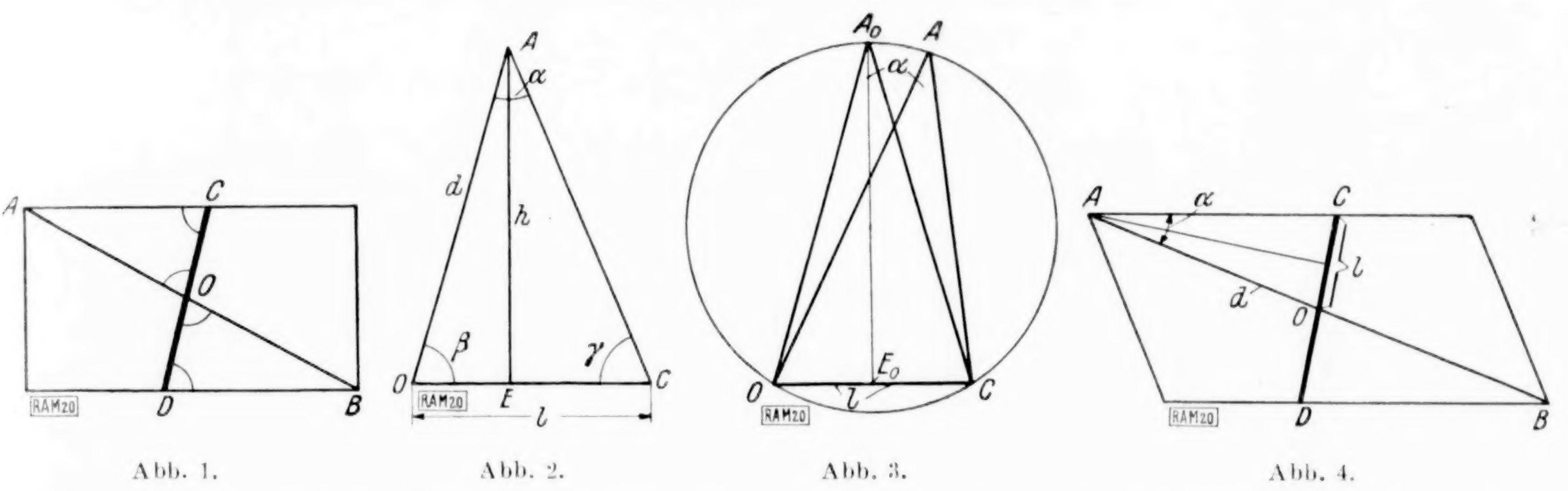


Abb. 1. Abb. 2. Abb. 3. Abb. 4.

Zu dem gleichen Ergebnis gelangt man aber auch auf elementar-geometrischem Wege folgendermaßen (Abb. 3):

Die Spitzen A aller Dreiecke AOC mit gemeinsamer Basis $OC = l$ und dem gleichen Winkel $OAC = \alpha$ liegen auf einem über OC beschriebenen Kreisbogen, dessen maximalen Abstand $AE = h$ von der Basis man erhält, indem man über OC das Mittellot $E_0 A_0 = h_0$ errichtet, das dem gleichschenkligen Falle entspricht und augenscheinlich auch das Maximum des Quotienten $\frac{h}{l}$ liefert.

Genau die gleichen Schlußfolgerungen ergeben sich, wenn an die Stelle des Rechteckes ein beliebiges Parallelogramm gesetzt wird. Auch hier zeigt es sich, daß das entsprechende $\triangle\, OAC$ über OC gleichschenklig mit A als Spitze sein muß (Abb. 4.).

2. Jetzt betrachten wir eine beliebige konvexe Figur, mit Mittelpunkt dargestellt als Tangentengebilde in der Form

$$x\cos t + y\sin t = h(t) > 0, \qquad (h(t) = h(t+\pi)) \quad \ldots \ldots \ldots (1),$$

wo t den Winkel der Normalen mit der x-Achse und t den Abstand der Tangente vom Mittelpunkt bezeichnet. Die Einhüllende der Tangentenschar ist dann bestimmt durch

$$-x\sin t + y\cos t = h'(t) \,. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

also wird

$$\left\{\begin{array}{l} x = h\cos t - h'\sin t \\ y = h\sin t + h'\cos t \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

die Parameter-Darstellung der konvexen Kurve.

Ein Durchmesser $AB = 2s$, der zum Parameter t gehört und dessen Lot mit der x-Achse den Winkel τ einschließt, wird dann bestimmt durch die Gleichung

$$x \cos \tau + y \sin \tau = 0, \quad \text{also}$$

$$h \cos(\tau - t) + h' \sin(\tau - t) = 0, \quad \text{oder}$$

$$\operatorname{tg}(\tau - t) = -\frac{h(t)}{h'(t)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

d. h.

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = -\cot(\tau - t) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \tau - t\right).$$

Hier ist aber $\tau - t$ der Winkel, den die Tangente in A mit dem Durchmesser AB bildet.

Soll nun AB eine Bruchlinie unserer konvexen Figur darstellen, so muß das Kräftepaar in den Punkten P und P' eingesetzt werden, die von AB einen maximalen Abstand $PQ = P'Q'$ besitzen und daher, da in ihnen die Tangente (bzw. „Stützgerade") der Richtung AB parallel ist, zum Parameter τ gehören. Außerdem muß für dieses Wertepaar t, τ der Quotient

$$u = \frac{OA}{PQ} = \frac{s(t)}{h(\tau)} = \frac{\sqrt{h(t)^2 + h'(t)^2}}{h(\tau)} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

unter gleichzeitiger Gültigkeit von (4) einen minimalen Wert annehmen. Diese elementare Minimumsaufgabe ergibt nach dem gewöhnlichen Verfahren durch eine einfache Rechnung als notwendige Bedingung:

$$\frac{du}{dt} = \frac{(h(t) + h''(t))\,(h'(t)\,h(\tau) - h(t)\,h'(\tau))}{\sqrt{h(t)^2 + h'(t)^2} \cdot h(\tau)^2} = 0 \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

also entweder

$$h(t) + h''(t) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6a)$$

oder aber

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{h'(\tau)}{h(\tau)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6b).$$

Der erste Fall (6a) entspricht einem Minimum von $s(t) = \sqrt{h(t)^2 + h'(t)^2}$ des Durchmessers selbst und wird z. B. realisiert durch eine Ellipse oder eine beliebige symmetrische konvexe Figur mit Mittelpunkt, in welcher der größte und kleinste Durchmesser aufeinander senkrecht stehen und der Tangentenabstand vom Mittelpunkt immer kleiner ist als die große Halbachse (Abb. 6).

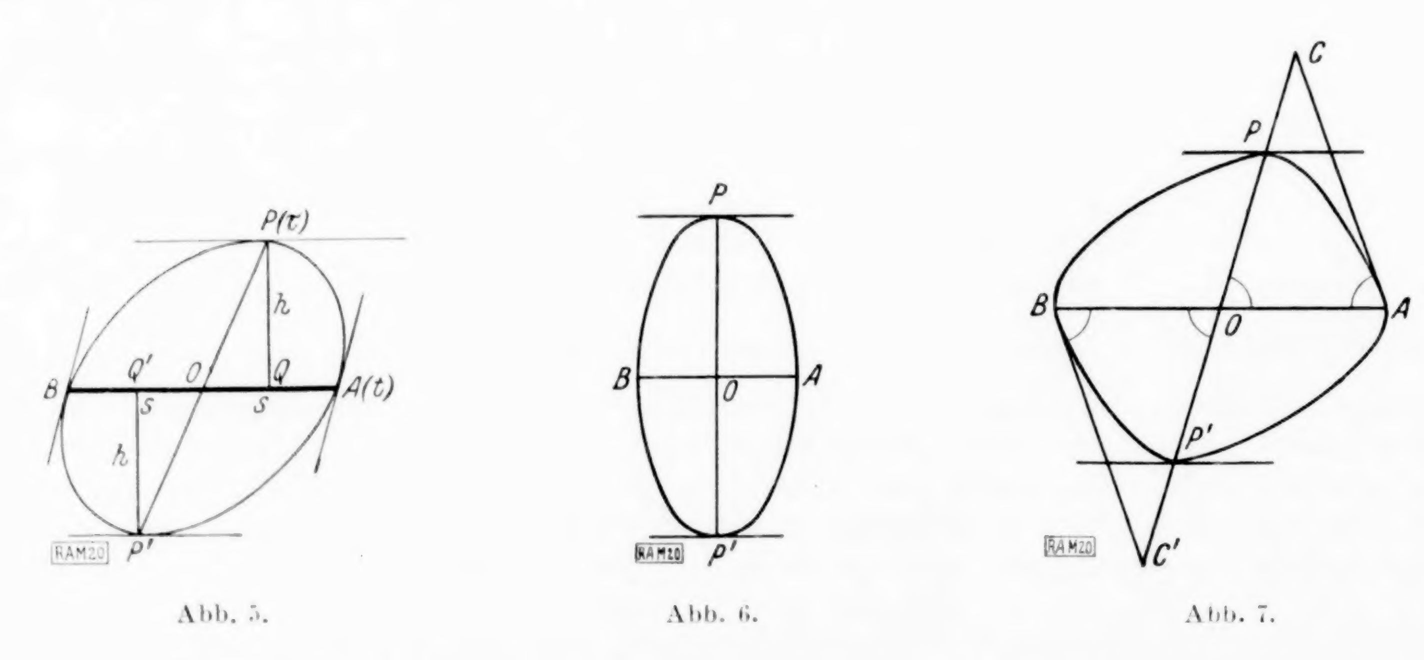


Abb. 5. Abb. 6. Abb. 7.

Der zweite Fall (6b) aber bedeutet nach (4), daß die Winkel in A und O einander gleich sind und so ein gleichschenkliges Dreieck OAC mit OA als Basis entsteht, ebenso aber auch entsprechend über OB ein gleichschenkliges Dreieck OBC', wie in Abb. 7 ersichtlich. Dieser Fall steht also in überraschender Analogie zu dem in Nr. 1 behandelten Spezialfalle des Parallelogrammes. Nur ist eben hier, wo es sich um kontinuierlich veränderliche Tangentenrichtungen handelt, das Minimum nicht mehr eindeutig, und es ist bei jeder Lösung besonders zu untersuchen, ob wirklich ein Minimum von $\frac{s}{h}$, eine mögliche Bruchlinie vorliegt. M 20